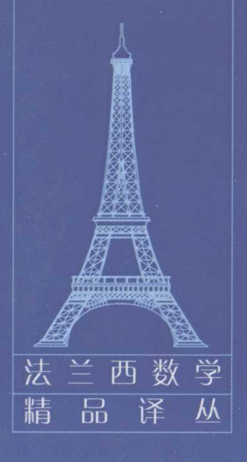
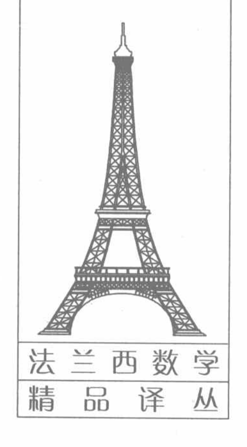


拟微分算子和 Nash-Moser 定理

□ S. 阿里纳克 P. 热拉尔 著
□ 姚一隽 译
□ 麻小南 校



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



数学天元基金资助项目

拟微分算子和 Nash-Moser 定理

□ S. 阿里纳克 P. 热拉尔 著
□ 姚一隽 译
□ 麻小南 校



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图字: 01–2008–4450 号

Serge Alinhac, Patrick Gérard
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
Université Paris Sud-11
F-91405 Orsay Cedex
France

本书译自法文版:
Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser
by Serge Alinhac et Patrick Gérard

图书在版编目（CIP）数据

拟微分算子和 Nash – Moser 定理／（法）阿里纳克，
（法）热拉尔著;姚一隽译. —北京:高等教育出版社，
2009.1
（法兰西数学精品译丛/李大潜主编）
ISBN 978 – 7 – 04 – 024619 – 3

Ⅰ.拟… Ⅱ.①阿…②热…③姚… Ⅲ.①拟微分算子 –
研究生 – 教材②微分几何 – 研究生 – 教材 Ⅳ.O175.3 O181.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 122742 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 – 58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 – 810 – 0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010 – 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　　本	787 × 1092　1/16	版　　次	2009 年 1 月第 1 版
印　　张	10.75	印　　次	2009 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	220 000	定　　价	29.00 元

物料号　24619 – 00

《法兰西数学精品译丛》序

随着解析几何及微积分的发明而兴起的现代数学, 在其发展过程中, 一批卓越的法国数学家发挥了杰出的作用, 作出了奠基性的贡献. 他们像灿烂的星斗发射着耀眼的光辉, 在现代数学史上占据着不可替代的地位, 在大学教科书、各种专著及种种数学史著作中都频繁地出现着他们的英名. 在他们当中, 包括笛卡儿、费马、帕斯卡、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、柯西、刘维尔、伽罗华、庞加莱、嘉当、勒贝格、魏伊、勒雷、施瓦兹及利翁斯等等这些耳熟能详的名字, 也包括一些现今仍然健在并继续作出重要贡献的著名数学家. 由于他们的出色成就和深远影响, 法国的数学不仅具有深厚的根基和领先的水平, 而且具有优秀的传统和独特的风格, 一直在国际数学界享有盛誉.

我国的现代数学, 在 20 世纪初通过学习西方及日本才开始起步, 并在艰难曲折中发展与成长, 终能在 2002 年成功地在北京举办了国际数学家大会, 在一个世纪的时间中基本上跟上了西方历经四个多世纪的现代数学发展的步伐, 实现了跨越式的发展. 这一巨大的成功, 根源于好几代数学家持续不断的艰苦奋斗, 根源于我们国家综合国力不断提高所提供的有力支撑, 根源于改革开放国策所带来的强大推动, 也根源于很多国际数学界同仁的长期鼓励、支持与帮助. 在这当中, 法兰西数学精品长期以来对我国数学界所起的积极影响, 法兰西数学的深厚根基、无比活力和优秀传统对我国数学家所起的不可低估的潜移默化作用, 无疑也是一个不容忽视的因素. 足以证明这一点的是: 在我国的数学家中, 有不少就曾经留学法国, 直接受到法国数学家的栽培和法兰西数学传统和风格的薰陶与感召, 而更多的人也或多或少地通过汲取法国数学精品的营养而逐步走向了自己的成熟与辉煌.

由于语言方面的障碍, 用法文出版的优秀数学著作在我国的传播受到了较大的限制. 根据一些数学工作者的建议, 并取得了部分法国著名数学家的热情支持, 高等

教育出版社决定出版《法兰西数学精品译丛》, 将法国的一些享有盛誉并有着重要作用与影响的数学经典以及颇具特色的大学与研究生数学教材及教学参考书, 有选择地从法文原文分批翻译出版. 这一工作得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的支持和赞助, 对帮助并推动我国读者更好地学习和了解法国的优秀数学传统和杰出数学成就, 进一步提升我国数学 (包括纯粹数学与应用数学) 的教学与研究工作的水平, 将是意义重大并影响深远的, 特为之序.

李大潜

2008 年 5 月

中文版序言

我们非常高兴地看到我们的著作《拟微分算子和 Nash-Moser 定理》的中文版. 我们感谢中译本的译校者和高等教育出版社的辛勤工作.

能够参与法国和中华人民共和国之间有着长久历史的文化和科技交流, 我们感到非常荣幸.

Serge Alinhac 和 Patrick Gérard

巴黎, 2008 年 4 月

前言

本书是给具有四年大学数学训练的学生们读的一本初等介绍. 我们假定读者了解泛函分析, Fourier 分析和分布理论 (特别是 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$ 的 Fourier 分析) 的基本知识. 第 0 章里对于本书中用到的符号, 概念及主要结果作了一个简单复习 (并给出相应的参考文献). 另一方面, 我们并不要求读者具备偏微分方程的知识, 当然如果学习过这方面内容无疑也是有益的.

本书的缘起是作者们自 1986 年 10 月起为法国巴黎高等师范学校学习 "基础与应用数学及信息科学" 硕士课程的二年级学生开设的名为 "拟微分算子和 Nash-Moser 定理" 的课程.

尽管本书所讨论的课题更多是直接取材于研究文献, 我们还是努力避免任何过于专门化的讨论, 各种无法详细讨论或者没有证明的结论, 以避免读者在阅读时产生困扰. 在每一章中我们都选择了一些课题加以详述; 而每章最后的注释则指出了相应结果的来源, 可能的变体, 当前的进展和各个课题之间的联系.

最后, 我们给出了相当数量的习题. 它们总的来说可以分成两类. 某些简单基本的习题可以帮助读者吸收掌握书中的内容并及时加以检查. 而那些比较复杂带有星号的习题则包含了一些晚近的进展, 有一些只是在研究论文中才能找到: 希望它们的原作者们可以原谅我们在此做的简化! 这些习题和某些名著中的不同, 学生们是的的确确可以做出来的, 我们在巴黎高等师范学校的教学经验已经证实了这一点[①].

我们同时也希望本书可以作为这一理论一本简单而自足的介绍, 而对那些并不非常熟悉本书所讨论课题的数学研究人员有所帮助.

这本讲义的这种双重目的使我们决定保持行文简明扼要, 这就解释了为什么某些段落写得非常紧凑 (当然我们相信对于那些用功的学生而言, 理解这些段落不会

[①]译校者注: 这里必须说明的是巴黎高等师范学校有着全法国乃至全欧洲水平最高的学生.

是很困难的). 我们特别想到那些希望在他们的研究工作中应用 Nash–Moser 定理或者希望了解微局部分析 (而同时又不打算在专业文献的丛林中打转) 的从事 "应用数学" 的同行们: 他们可以独立地阅读相应的章节.

对于书中讲述的材料的选择完全取决于作者的研究领域和个人偏好, 实际上, 我们都认为, 某些困难的 (非线性) 问题没有足够的拟微分算子的知识是无法解决的.

作者们受益于 (在注释中列举的) 众多数学家, 正是他们启发激励作者们来写这样一本书. 特别我们要感谢 L. Hörmander, 第 I 章和 III. C 的内容基本上都取自于他的工作. 书后的参考文献给出了我们所用资料的来源.[①]

在讨论作为众多晚近发展的起点的重要概念的同时, 我们试图能够引进一些货真价实的定理: 微局部椭圆正则性; 奇性的传播; 拟线性双曲方程组解的存在性; 等距嵌入的存在性; Nash–Moser 定理. 本书的结构如下:

在第 I 章中我们在 ($\mathbb{R}^n$ 上的) 整体框架下讨论拟微分算子的 "极小" 理论, 这在实践中是很有用的. 这里的要点包括象征的概念, 算子的象征演算, Sobolev 空间中的作用和坐标变换下的不变性. 行文中我们只加入了很少的具体应用, 且最具技巧性的证明都放在附录里了, 目的是帮助读者最快地对这一主题有一个整体的了解. 第 I 章有相当数量的习题, 不仅给出了这一理论的若干变体, 也给出了一些应用, 特别是紧流形上的分析.

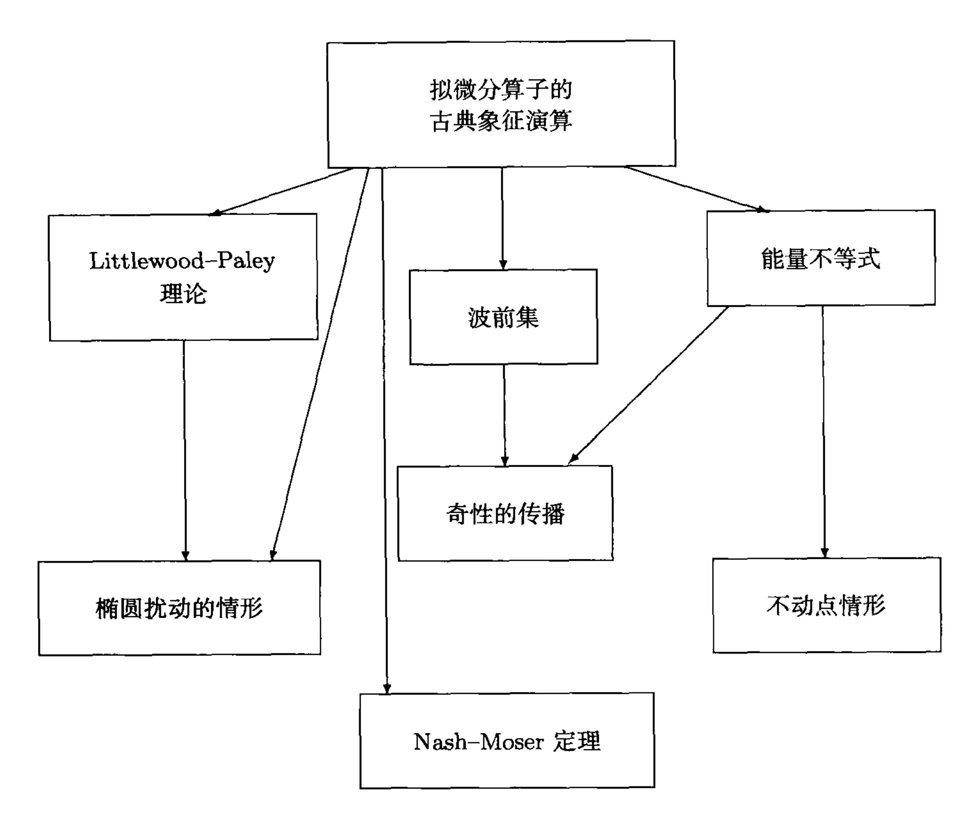
第 II 章有三个主题. II. A 部分讨论对分布作 "二进分解" 的 Littlewood–Paley 理论: 这就把 (与第 I 章中的经典象征演算相关联的) 频率 ξ 空间根据范数 $|\xi|$ 的大小做切割的做法系统化了. 这一非常简单的理论让我们可以非常快速地得到 Sobolev 和 Hölder 空间中的复合函数的有趣性质. II. B 部分讨论波前集的概念及其与拟微分算子之间的联系: 这一回是 (与古典象征的齐次性相关联的) 将频率 ξ 空间根据方向 $\xi \in S^{n-1}$ 作锥形分割. 最后, II. C 部分处理一类双曲能量不等式, 拟微分算子在这里被证明是非常有效的工具. 这样, 第 II 章的作用就是给出第 I 章中的 "核心理论" 的一些非常有价值的应用, 并同时准备第 III 章中将要用到的材料和概念.

最后一章讨论几何与分析中出现的一些可以简化为扰动问题的非线性问题. 本章的结构反映了我们可能碰到的各种不同情形: "椭圆" 情形, 这时只需用到通常的 Banach 空间上的隐函数定理就够了; "不动点" 情形, 我们在非线性双曲问题或者等距嵌入问题中会遇到; 最后是 "导数缺失" 非常大的情形, 我们必须使用一种 Nash–Moser 技巧. Nash–Moser 定理完全建立在先验 "柔性" 不等式上; 已经熟悉 (第 I 章和 III. C 节中介绍的)先验不等式的读者可以很快通过其与 Littlewood–Paley 理论和 J.-M. Bony 的仿微分演算 (II. A 节) 的显而易见的联系来理解 "柔性" 估计.

这就给出了本书内容非常深刻的统一性, 总结在下述示意图中.

---

①译校者还增加了若干中文参考文献.



在这种精神指引下, 我们最近很高兴地了解到 L. Hörmander 的工作 [H9], 它解释了拟微分算子, 仿微分算子, 不动点方法和 Nash–Moser 定理之间的联系.

最后, 我们非常感谢 G. Ben Arous① 和 J.-B. Bost② (法国巴黎高等师范学校) 所给出的非常宝贵的意见和建议.

①Gérard Ben Arous, 日内瓦大学教授, Bourbaki 学派成员.

②Jean-Benoît Bost, 巴黎第十一大学教授, 2006 年国际数学家大会邀请报告人, Bourbaki 学派成员.

目录

0 记号和分布论的复习

在这一章里, 我们将引进本书中所使用的各种记号, 并且简单地复习一下本书中将经常用到的分布论和 Fourier 分析的基本内容. 在以后的章节中我们将假定读者对于这些内容有足够的了解. 对于程度不是非常好的学生来说, 下面这些结果的证明可以在 J. Chazarain 和 A.Piriou 的书 [CP] (第一章, 第 1, 2, 4 节) 中找到, 也可以参阅 W. Rudin 的书 [R]. 至于那些对于分布论 (广义函数论) 了解不多的读者, 我们建议他们先读一下 L. Schwartz 的书 [S], 而那些想检验自己对于这个领域的理解程度的学生则可以在 C.Zuily 的书 [Z] 里找到课程概要和大量带解答的习题. ①

0.1 可微函数空间和微分算子

设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中一开集. 对于非负整数 k, 我们记 Ω 上 k 次连续可微的复值函数全体为 $C^k(\Omega)$. 类似的, 我们用 $C^\infty(\Omega)$ 表示 Ω 上无限可微函数空间. 这些记号一方面可以推广到 Ω 是一个微分流形 M 的情形, 另一方面可以推广到函数不再取复数值而是在一个一般的 $\mathbb{R}$ 上拓扑向量空间 E 中取值的情形: 这时我们记相应的空间为 $C^k(\Omega, E)$ 和 $C^\infty(\Omega, E)$.

对于 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$②, $C_0^k(\Omega)$ 表示 $C^k(\Omega)$ 中由那些在某个 Ω 中的紧集外取零值的元素构成的子空间, 而 $C^k(\overline{\Omega})$ 则用来表示由 $C^k(\mathbb{R}^n)$ 中的函数在 $\overline{\Omega}$ 上的限制构成的空间.

为了表示 $C^k(\Omega)$ 中元素的偏导数, 我们将使用**重指标:** 一个重指标 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 是 $\mathbb{N}^n$ 中的一个元素, 它的**模**定义为 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, 同时我们记 $\alpha! =$

①译校者注: 也可以参阅 [Ch1] 或者 [X] 下册第七章.

②译校者注: 此处 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$.

$\alpha_1!\cdots\alpha_n!$. 对于 $j\in\{1,\cdots,n\}$, 偏导 $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ 有时也记为 ∂_{x_j}, 或者在不致发生混淆的情况下简记为 ∂_j. 出于和 Fourier 变换有关的原因 (见下面的第 0.5 节), 引进记号 $D_j=-\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ 也是有用的. 高阶导数将被记成 $\partial^\alpha=\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}$ 或者 $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$. 我们还将根据这一规则来表达根据 $\mathbb{R}^n$ 中向量的分量构造的单项式. 这样对于 $x\in\mathbb{R}^n$, 我们记 $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$.

一个 Ω 上的**微分算子**是系数取在 $C^\infty(\Omega)$ 中的各阶偏导数的一个有限线性组合. 如果高于 m 阶的偏导数不出现, 那么我们称它的**阶**是 m. 换句话说, 一个 Ω 上的 m 阶微分算子可以写成

$$P=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)D^\alpha,$$

其中 $a_\alpha\in C^\infty(\Omega)$ 是 P 的系数. 利用这一形式, 我们很容易看到对于任意的 k,P 都定义了一个从 $C^{k+m}(\Omega)$ 到 $C^k(\Omega)$ 的线性映射. P 的**象征**是由

$$p(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

定义在 $\Omega\times\mathbb{R}^n$ 上的关于 ξ 的多项式函数, 而它的 m **阶主象征** (或者在不致混淆的情况下简称为**主象征**) 则是下述关于 ξ 的齐次函数:

$$p_m(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

0.2　$\mathbb{R}^n$ 中一个开集上的分布

a) 所谓开集 Ω 上的一个**分布**即是 $C_0^\infty(\Omega)$ 上满足下述条件的一个连续线性泛函 u: 对于任何的紧子集 $K\subset\Omega$, 存在整数 m 和常数 C, 使得对于所有在 K 外取零值的函数 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 均有

$$|\langle u,\varphi\rangle|\leqslant C\sup_{x\in K}\sup_{|\alpha|\leqslant m}|\partial^\alpha\varphi(x)|\,.$$

Ω 上所有分布全体构成的空间记为 $\mathcal{D}'(\Omega)$. 特别我们注意到

$$\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega),\forall f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\,,\ \langle f,\varphi\rangle=\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\mathrm{d}x \tag{2.1}$$

是一个有界的量, 因此这个空间包含了 Ω 上的**局部可积**函数空间 $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

分布的另一个例子由单点 Dirac **质量**给出. 对 $x_0\in\Omega$, $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, 我们定义 $\langle\delta_{x_0},\varphi\rangle=\varphi(x_0)$.

b) 对于 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 我们用下式定义 $\partial_j u \in \mathcal{D}'(\Omega)$:

$$\langle \partial_j u, \varphi \rangle = -\langle u, \partial_j \varphi \rangle.$$

我们注意到, 利用 (2.1), 很容易就可以把原本定义在 $C^1(\Omega)$ 上的算子 ∂_j 推广到分布上面. 同理, 对于 $a \in C^\infty(\Omega), au \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 可以由

$$\langle au,\, \varphi \rangle = \langle u,\, a\varphi \rangle$$

来定义. 这样, 所有的微分算子 $P = \sum a_\alpha D^\alpha$ 都可以根据公式

$$\langle Pu,\, \varphi \rangle = \langle u,\, {}^t P\varphi \rangle$$

延拓成一个 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 到自身的线性映射, 其中 ${}^t P\varphi = \sum (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi)$.

c) 如果 Ω' 是 Ω 内的一个开集, 而 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 那么 u 在 Ω' 上的**限制** $u|_{\Omega'}$ 就是线性泛函 u 在 $C_0^\infty(\Omega)$ 的子空间 $C_0^\infty(\Omega')$ 上的限制. 我们称 u 在 Ω' 上为 0 (或者属于 C^k), 如果 $u|_{\Omega'} = 0$ (或者 $u|_{\Omega'}$ 可以由某个 $f \in C^k(\Omega')$ 根据 (2.1) 定义). 为了表明这个定义是合理的, 我们要证明由 u 在 Ω 的任一开覆盖中每个开集上的限制我们可以把 u 重新构造出来. 为此我们有如下引理.

单位分解引理 设 (Ω_j) 是 Ω 中的一族开集, 满足 $\Omega = \bigcup_j \Omega_j$. 则存在一族函数 (φ_j) 使得

i) $\forall j,\ \varphi_j \in C^\infty(\Omega),\ \operatorname{supp}(\varphi_j) \subset \Omega_j,\ 0 \leqslant \varphi_j \leqslant 1$;

ii) 对 Ω 中所有紧集 $K, \{j,\ K \bigcap \operatorname{supp} \varphi_j \neq \varnothing\}$ 是有限集;

iii) 在 Ω 上, $\sum\limits_j \varphi_j = 1$ (根据 ii), 这个和式在每一点上都是可定义的).

除了前面已经给出的参考文献以外, 读者还可以在第 I 章习题 6.1 中找到上述引理的一个证明 (在那里我们假设 $\overline{\Omega_j}$ 在 Ω 中是紧致的; 一般情况可以很容易地由此得到).

根据上述引理, 我们可以证明诸如 "若 $\bigcup_j \Omega_j = \Omega$, 且对所有的 $j, u|_{\Omega_j} = 0$(或者 $u|_{\Omega_j} \in C^k$), 则 $u = 0$(或者 $u \in C^k(\Omega)$)" 这样的结论.

由此, 我们有下述定义: 一个分布 u 的**支集**(或者**奇异支集**) 是那些具有某个邻域使 u 在其中为 0(或者为 C^∞) 的点全体构成的集合在 Ω 中的补集. u 的支集记作 $\operatorname{supp} u$, 奇异支集记作 $\operatorname{sing\,supp} u$. 这是两个闭集, 满足 $\operatorname{sing\,supp} u \subset \operatorname{supp} u$. 前述结果可以改写为

$$u = 0 \Leftrightarrow \operatorname{supp} u = \varnothing,$$

$$u \in C^\infty \Leftrightarrow \operatorname{sing\,supp} u = \varnothing.$$

最后, 我们指出, 如果 $u \in C^0(\Omega)$, 以上定义的 u 的支集和 $\{x \in \Omega, u(x) \neq 0\}$ 的闭包重合.

Ω 中具有**紧支集**的分布全体记作 $\mathcal{E}'(\Omega)$. 如果我们考虑 $C^\infty(\Omega)$ 上由半范数族

$$\sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leqslant m} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

定义的拓扑 (其中 K 取遍 Ω 中所有紧集,m 取遍全体自然数), 那么 $C^\infty(\Omega)$ 上的连续线性泛函全体就是 $\mathcal{E}'(\Omega)$.

0.3 卷积

a) 设 u 和 v 是两个具有紧支集的 C^∞ 函数. 我们定义

$$u * v(x) = \int u(y)v(x-y)\mathrm{d}y = \int u(x-y)v(y)\,\mathrm{d}y. \tag{3.1}$$

这样定义的函数 $u * v$ 是一个具有紧支集的光滑 (C^∞) 函数, 满足

$$\mathrm{supp}\,(u * v) \subset \mathrm{supp}\, u + \mathrm{supp}\, v. \tag{3.2}$$

我们称之为函数 u 和 v 的**卷积**.

当然, 我们也可以对光滑性差一些的函数定义卷积. 最自然的推广是对可积函数做的: 如果 u 和 v 是 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中的函数, 那么由 (3.1) 定义的函数也在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中, 而且我们有

$$\int |u * v(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int |u(x)|\mathrm{d}x \cdot \int |v(x)|\mathrm{d}x.$$

但是实际上我们最常用的并不是这个延拓, 而是下面 b) 和 d) 中描述的, 对于 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (或者 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$) 所做的推广.

b) 假设 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 我们记 $v_x(y) = v(x-y)$, 那么等式

$$u * v(x) = \langle u, v_x \rangle$$

定义了 $\mathbb{R}^n$ 上的一个 C^∞ 函数 $u * v$. 它满足

$$\partial^\alpha (u * v) = \partial^\alpha u * v = u * \partial^\alpha v \tag{3.3}$$

$$\mathrm{supp}\,(u * v) \subset \mathrm{supp}\, u + \mathrm{supp}\, v. \tag{3.4}$$

c) 卷积是被广泛使用的**光滑化**过程的基础. 现在我们对此作简单描述.

设 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是一个在全空间上积分为 1 的非负函数, 并设 $\varepsilon > 0$; 我们定义 $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$. 这样对于 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, C^∞ 函数族 $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon$ 在 ε 趋向于 0 的时候按照下述意义收敛于 u:

$$\forall \psi \in C_0^\infty, \quad \int u_\varepsilon(x)\psi(x)\mathrm{d}x \longrightarrow \langle u, \psi \rangle. \tag{3.5}$$

依这个办法用光滑函数做逼近的好处在于函数列 u_ε 的收敛性态本质上由 u 的光滑性所决定. 这样如果 $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$,那么 u_ε 在半范数族 $\sup\limits_{x\in K}\sup\limits_{|\alpha|\leqslant k}|\partial^\alpha v(x)|$ 的意义下收敛于 u, 其中 K 取遍 $\mathbb{R}^n$ 中所有紧致集: 如果 $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ (p 次可积函数, $1 \leqslant p < +\infty$),那么 u_ε 在 L^p 中收敛于 u.

利用 (3.4),我们可以进一步得到当 ε 趋向于 0 的时候, u_ε 的支集可以任意地接近 u 的支集. 利用一个 "截断" 过程,我们可以对 $\mathbb{R}^n$ 中一个开集 Ω 上的分布定义光滑化过程,并证明诸如 "对于 $p \in [1, +\infty)$, $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密或者在 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 中按照 '弱拓扑'(也就是按照 (3.5)) 稠密" 这样的结论.

d) 为了定义两个分布的卷积, 我们首先注意到, 对于 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $v, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 我们有

$$\int u * v(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \langle u, \tilde{v} * \varphi\rangle,$$

其中 $\tilde{v}(x) = v(-x)$.

我们利用等式

$$\langle \tilde{v}, \varphi\rangle = \langle v, \tilde{\varphi}\rangle$$

将算子 $v \mapsto \tilde{v}$ 延拓到分布上. 然后对 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 我们由

$$\langle u * v, \varphi\rangle = \langle u, \tilde{v} * \varphi\rangle$$

定义一个 $\mathbb{R}^n$ 上的分布, 记作 $u * v$. 除了 (3.3) 和 (3.5) 外, 它还满足

$$\text{sing supp } (u * v) \subset \text{sing supp } u + \text{sing supp } v. \tag{3.6}$$

例如, 对于原点上的 Dirac 质量 δ_0, 我们可以证明对 $\mathbb{R}^n$ 上的任何分布 u 都有 $u * \delta_0 = u$. 分布的卷积是研究常系数微分算子的基本工具. 在第 I 章 I.1.1 节我们可以看到一个相关的例子, 同时也会给出 (3.6) 的一个证明概要.

0.4 核函数

设 Ω_1 和 Ω_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个开集, $K \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$. 那么对于 $u \in C_0^\infty(\Omega_1)$, $v \in C_0^\infty(\Omega_2)$, $u \otimes v(x_1, x_2) = u(x_1)v(x_2)$, 等式

$$\langle A_K v, u\rangle = \langle K, u \otimes v\rangle \tag{4.1}$$

定义了一个线性映射 $A_K : C_0^\infty(\Omega_2) \to \mathcal{D}'(\Omega_1)$. 该映射依下述意义连续: 对于任意 $u \in C_0^\infty(\Omega_1)$ 和 Ω_2 中的任意紧致集 K, 存在常数 C 和整数 m, 满足对于支集在 K 中的任意函数 $v \in C_0^\infty(\Omega_2)$:

$$|\langle A_K v, u\rangle| \leqslant C \sup_{x\in K}\sup_{|\alpha|\leqslant m}|\partial^\alpha v(x)|. \tag{4.2}$$

当 $K \in L^1_{\text{loc}}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ 时,等式 (4.1) 具有更常见的形式

$$A_K v(x_1) = \int K(x_1,\, x_2) v(x_2)\, \mathrm{d}x_2.$$

一般说来,分布 K 由 (4.1) 完全决定,我们称之为算子 A_K 的**核函数**.

L. Schwartz 的一个定理表明,每一个在 (4.2) 意义下连续的算子 $A: C_0^\infty(\Omega_2) \to \mathcal{D}'(\Omega_1)$ 都有相应的核函数. 但是在下文中我们将不会使用这个定理,因为我们处理的算子的核函数都是很容易直接写出来的. 例如,微分算子 $P = \sum a_\alpha(x) D^\alpha$ 的核函数是分布 $K(x_1,\, x_2) = \sum a_\alpha(x_1) D^\alpha \delta(x_1 - x_2)$,其中 δ 是 Dirac 质量: 由分布 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 定义的卷积算子的核函数是 $K(x_1,\, x_2) = u(x_1 - x_2)$.

核函数的概念的提出使我们可以用一种更加代数化的方式研究算子. 例如,给定具有核函数 K 的算子 A,我们很容易得到满足下式的 A 的**转置**(记作 ${}^tA$):

$$\forall u \in C_0^\infty,\ \forall v \in C_0^\infty, \quad \langle Av,\, u\rangle = \langle {}^tAu,\, v\rangle,$$

因为只要取 ${}^tA$ 为核函数是

$${}^tK(x_1,\, x_2) = K(x_2,\, x_1)$$

的算子就可以了.

核函数同样可以用来控制算子的支集 (和奇异支集). 例如

$$\operatorname{supp}(A_K v) \subset \{\, x_1,\, \exists\, x_2 \in \operatorname{supp} v,\, (x_1,\, x_2) \in \operatorname{supp} K \,\}.$$

对于奇异支集我们也有类似结论.

0.5　$\mathbb{R}^n$ 上的 Fourier 分析

a) 我们引进 $\mathbb{R}^n$ 上速降 C^∞ 函数空间 $\mathcal{S}$. 该空间中的函数 u,除了在 $\mathbb{R}^n$ 上 C^∞ 外, 还满足

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \forall \beta \in \mathbb{N}^n, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta u(x) \right| < +\infty.$$

对 α 和 β 取遍 $\mathbb{N}^n$,我们在这个空间 $\mathcal{S}$ 上考虑相应的半范数族定义的拓扑. 如果 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个向量,我们定义

$$|x| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}.$$

例　由 $u(x) = \mathrm{e}^{-|x|^2/2}$ 定义的函数是 $\mathcal{S}$ 中的元素.

b) 设 $u \in \mathcal{S}$. 对于 $\xi \in \mathbb{R}^n$,我们定义

$$\hat{u}(\xi) = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} u(x)\, \mathrm{d}x, \tag{5.1}$$

其中 $x\xi = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$. 这样我们就定义了一个连续线性映射

$$\mathcal{F}: \mathcal{S} \to \mathcal{S},$$
$$u \mapsto \hat{u}.$$

称作 Fourier **变换**. 函数 $\mathcal{F}u = \hat{u}$ 称作 u 的 Fourier **变换**.

算子 $\mathcal{F}$ 具有下列基本性质 (我们从中可以看到引进 D_j 的好处):

$$\widehat{D_j u}(\xi) = \xi_j \hat{u}(\xi), \tag{5.2}$$

$$\widehat{\tau_y u}(\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}y\xi} \hat{u}(\xi), \tag{5.2'}$$

其中 $\tau_y u(x) = u(x+y)$.

$$\widehat{x_j u}(\xi) = -D_j \hat{u}(\xi), \tag{5.3}$$

$$\left(\widehat{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\eta} u}\right)(\xi) = \tau_\eta \hat{u}(\xi). \tag{5.3'}$$

c) 我们称 $\mathcal{S}$ 上对于 a) 中定义的半范数全体连续的线性形式为 $\mathbb{R}^n$ 上的一个**缓增分布**. 缓增分布全体构成的空间记作 $\mathcal{S}'$. 特别我们有 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'$. 而由等式

$$\forall u \in \mathcal{S},\ \forall v \in \mathcal{S}, \quad \langle u, v \rangle = \int u(x) v(x)\, \mathrm{d}x$$

定义的 $\mathcal{S}$ 在自身上的作用, 我们知道 $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$. 进而根据 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}$, 我们容易 (用光滑化) 证明 $\mathcal{S}$ 在 $\mathcal{S}'$ 中 (对于在 $\mathcal{S}$ 上简单收敛的拓扑而言) 稠密.

注意到 Fubini 定理给出

$$\forall u \in \mathcal{S},\ \forall v \in \mathcal{S}, \quad \int \hat{u}(\xi) v(\xi) \mathrm{d}\xi = \int u(x) \hat{v}(x) \mathrm{d}x. \tag{5.4}$$

我们由此知道, 对于 $u \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$, 等式

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle \tag{5.5}$$

定义了 $\mathcal{F}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ 的唯一一个延拓 $\mathcal{F}: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$. 映射 $\mathcal{F}$ 仍然满足 (5.2), (5.2′) 和 (5.3), (5.3′).

我们注意到映射 $\mathcal{F}$ 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上的限制仍然由等式 (5.1) 给出, 并且对 $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{u}$ 是一个在无穷远趋向于 0 的连续函数. 另一个例子是

$$\hat{\delta} = 1,$$

这可以直接由定义得到.

利用 (5.2), 我们知道存在一个 $c \in \mathbb{C}$ 满足 $\hat{1} = c\delta$. 由此得到, 对于所有的 $u \in \mathcal{S}$:

$$\hat{\hat{u}}(0) = \langle \delta, \hat{\hat{u}} \rangle = \langle 1, \hat{u} \rangle = \langle \hat{1}, u \rangle = cu(0),$$

而对于一些特殊的例子演算 (比如 $u(x) = \mathrm{e}^{-|x|^2/2}$) 可以得到 $c = (2\pi)^n$. 利用平移算子 τ_y 和公式 (5.2′), (5.3′), 我们得到

$$\hat{\hat{u}}(x) = (2\pi)^n u(-x).$$

换句话说, 对于 $u \in \mathcal{S}$, (5.1) 等价于

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \hat{u}(\xi)\, d\xi. \tag{5.6}$$

这被称为Fourier **逆变换公式**.

因此 $\mathcal{F}$ 是从 $\mathcal{S}$ 到 $\mathcal{S}$ 的一个同构, 根据 (5.5), 它也是一个从 $\mathcal{S}'$ 到 $\mathcal{S}'$ 的同构. 它的逆是 $(2\pi)^{-n}\tilde{\mathcal{F}}$, 其中 $\tilde{\mathcal{F}}$ 是 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{S}'$ 上由等式

$$\langle \tilde{v}, \varphi \rangle = \langle v, \tilde{\varphi} \rangle, \quad \text{其中} \quad \tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$$

定义的对称变换 $v \mapsto \tilde{v}$ 的复合.

d) 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中 Fourier 变换有着特别重要的地位. 对于 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 我们考虑内积

$$(f, g) = \int f(x)\overline{g(x)}\, \mathrm{d}x.$$

根据 (5.4) 和 Fourier 逆变换公式, 对于 $f, g \in \mathcal{S}$ 我们有

$$(\hat{f}, \hat{g}) = (2\pi)^n (f, g). \tag{5.7}$$

由此推出 $\mathcal{F}$ 可以延拓成 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的自同构, 使得 $(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}$ 是一个酉算子. 这就是 Plancherel**定理**.

e) 公式 (5.2′) 和 (5.3′) 使我们可以研究卷积和 Fourier 变换之间的关系. 为了阐明这个关系, 我们引进 C^∞ 缓增函数的概念. 一个函数 $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 被称为缓增的, 如果我们有

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists M_\alpha \in \mathbb{N}, \exists C_\alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \ |\partial^\alpha a(x)| \leqslant C_\alpha (1 + |x|)^{M_\alpha}.$$

比如多项式函数就是这样的函数, 更一般的, 对于 $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\hat{u}$ 是一个 C^∞ 缓增函数.

如果 a 是一个 C^∞ 缓增函数, 那么和 a 的乘积定义了 $\mathcal{S}$ 上的一个连续线性算子, 因此, 由对偶性, 它可以延拓成 $\mathcal{S}'$ 上的一个连续线性算子. 特别我们有 $a \in \mathcal{S}'$ (把它看作 $a \cdot 1$).

最后,如果 $v \in \mathcal{S}', \psi \in \mathcal{S}$,那么我们用

$$v * \psi(x) = \langle v,\, \psi_x \rangle$$

来定义他们的卷积 $v * \psi$,其中 $\psi_x(y) = \psi(x-y)$ 是一个 C^∞ 缓增函数. 我们于是有下面的公式

$$\text{如果 } u \in \mathcal{S}',\ v \in \mathcal{E}',\ \text{那么 } \mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}u\mathcal{F}v;$$
$$\text{如果 } u \in \mathcal{S}',\ \varphi \in \mathcal{S}',\ \text{那么 } \mathcal{F}(\varphi u) = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}u * \mathcal{F}\varphi.$$

在其他一些 (特别是和 L^1 有关的) 场合上述等式也成立,但是在本课程中我们用不到这些.

I 拟微分算子

在本章中我们将以自足的方式给出一种拟微分算子理论的基本要素: 象征, 算子的象征演算, 在 Sobolev 空间上的作用, 以及在坐标变换下的不变性.

I.1 导论

I.1.1 Fourier 变换的运用

对于一个 C^∞ 缓增函数 $a(\xi)$ (第 0 章, 0.5. 节 e)), 我们用 $a(D)$ 记在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上定义的算子

$$(\widehat{a(D)u})(\xi) = a(\xi)\hat{u}(\xi).$$

我们称函数 $a(\xi)$ 为算子 $a(D)$ 的**象征**. 对于 $u \in \mathcal{S}$, 我们有等式

$$(a(D)u)(x) = (2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}a(\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{1.1.1}$$

和 Fourier 逆变换公式

$$u(x) = (2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

比较以后得到, 对于 u 在 "频率"ξ 的分量 $\hat{u}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}$ 而言, $a(D)$ 的作用只是对 "振幅"$\hat{u}(\xi)$ 乘上 $a(\xi)$.

此外, 我们还有关系式

$$a(D)b(D) = (ab)(D).$$

这表明两个算子的复合的象征就是两个算子的象征之积: 我们称这样的性质为 "象征演算", 在 I.1.3 节我们将对此详细讨论. 我们还将 (在对 $a(\xi)$ 的增长速度加以一定的限制的前提下) 称 $a(D)$ 为一个 "常系数 (即其象征与 x 无关) 拟微分算子".

本章中将发展出一套把算子 $a(x, D)$ 和一般的象征 $a(x, \xi)$ 相关联的理论，使我们仍然有上面提到的 “$a(x, D)$ 改变振幅” 的性质，更重要的是我们将会得到相应的象征演算

$$a(x, D)b(x, D) = (a\#b)(x, D),$$

这里 $a\#b$ 是一个我们能够计算的象征 (而且当 b 是常系数的时候就是 ab). 不过，即便是最简单的常系数算子的理论也可以得到一些有趣的结论. 比如我们考虑 Laplace 算子:

$$P = \Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2.$$

这个算子就是前面描述的这种类型的，它具有象征

$$a(\xi) = -|\xi|^2.$$

我们可以找到一个满足 $PE = \delta + \omega$ 的分布 E (这里 δ 是 0 点处的 Dirac 质量, $\omega \in \mathcal{S}$); 其实我们只要取

$$\hat{E}(\xi) = -\frac{1 - \chi(\xi)}{|\xi|^2}$$

就可以了 (这里 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且在 $\xi = 0$ 的一个邻域里满足 $\chi = 1$), 这是因为

$$\widehat{PE}(\xi) = -|\xi|^2 \hat{E}(\xi) = 1 - \chi(\xi).$$

这样的一个分布 E 在 0 点之外是 C^∞ 的; 事实上对于充分大的 $|\xi|$, $-\widehat{\mathrm{i}x_j E} = \partial_{\xi_j} \hat{E}$ 是 -3 次齐次的，而 $\widehat{(-\mathrm{i}x_j)^k E} = \partial_{\xi_j}^k \hat{E}$ 是 $-2-k$ 次齐次的，对于 E 的各阶导数也有类似结论 (参见习题 1.1). 另一方面，若 $f \in \mathcal{E}'$, 我们有

$$P(E * f) = f + \omega * f.$$

因此，分布 $u = E * f$ 就是方程

$$Pv = f$$

的一个近似解，且误差项 $\omega * f$ 是 C^∞ 的. 最后我们注意到 $\operatorname{sing\,supp} u = \operatorname{sing\,supp} f$: 事实上，因为 $Pu = f + C^\infty$, 所以在 u 是 C^∞ 的地方 f 也是光滑的；另外，如果 f 在 x_0 附近是 C^∞ 的，我们可以取一个在 x_0 附近为 1 的函数 $\chi \in C_0^\infty$, 满足 $\chi f \in C^\infty$, 在等式

$$u = E * f = E * (\chi f) + E * ((1 - \chi) f)$$

右边我们有 $E * (\chi f) \in C^\infty$, 且

$$(E * ((1 - \chi) f))(x) = \int E(x - y)(1 - \chi(y)) f(y) \mathrm{d}y$$

在 x 接近 x_0 的时候只和 $x - y \neq 0$ (也就是 E 光滑的地方) 有关. 因此在 x 接近 x_0 的时候 $u(x) \in C^\infty$.

利用 E 我们还可以得到,对于方程 $Pv = f$ 的每一个解 v,我们有

$$\text{sing supp } v = \text{sing supp } f.$$

实际上,如果 f 在 x_0 附近是 C^∞ 的,取一个在 x_0 附近为 1 的函数 $\chi \in C_0^\infty$; 那么在 x_0 附近 $P(\chi v)$ 就是 f,因此它在 x_0 附近也是 C^∞ 的. 既然 χv 和 $P(\chi v)$ 都是 $\mathcal{E}'$ 中的元素,我们有

$$E * (P(\chi v)) = \chi v + \omega * (\chi v) \equiv \chi v \mod C^\infty,$$

于是由前述结果我们知道在 x_0 附近 $\chi v \in C^\infty$.

所以利用和 E 做卷积得到的算子 $\hat{E}(D)$,我们先把它看作模 C^∞ 意义下 P 的右逆 (为了得到方程 $Pu = f$ 的一个 "近似解"),再把它看成模 C^∞ 意义下 P 的左逆 (为了研究 $Pv = f$ 的解的光滑性). 我们称之为 P 的一个**拟基本解**.

尽管如此,这种完全 "从 Fourier 出发" 的工作方式还是有种种不便: 我们无法做到精确控制 supp u 和 sing supp u,而且这种手段也难以用来处理 "变系数" 算子.

I.1.2 变系数算子

由 I.1.1 节中的方法我们对于一个算子 $P = \sum a_\alpha(x) D_x^\alpha (a_\alpha \in \mathcal{S})$ 得到

$$\widehat{Pu}(\xi) = (2\pi)^{-n} \sum \hat{a}_\alpha * (\xi^\alpha \hat{u}(\xi)),$$

但这个式子并不是很好用. 实际上,更加好用的关系式是

$$Pu(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} p(x, \xi)\, \hat{u}(\xi)\, d\xi, \tag{1.2.1}$$
$$p(x, \xi) = \sum a_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

因为在这一形式下我们并不一定要取 $p(x, \xi)$ 为 ξ 的一个多项式函数, 也就是说并不一定要取成微分算子的象征: 所有 "适当的" $a = a(x, \xi)$ 都可以. 我们称相应的算子为 "象征为 $a(x, \xi)$ 的拟微分算子", 记作 $a(x, D)$; 或者在不会发生混淆的时候简单记作 A.

所谓 "适当的" 是指:

i) $a(x, \xi)$ 必须在 $|\xi| \to +\infty$ 时对于 ξ 具有多项式增长, 而且它对 ξ 求导数可以使这一性质具有更加好的表现; 换句话说存在一个 m 使得

$$\forall \alpha, \quad \left|\partial_\xi^\alpha a(x, \xi)\right| \leqslant C_\alpha (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|}.$$

ii) $a(x, \xi)$ 对于 x 的变化要足够小, 以至于 (1.2.1) 中振幅 $a(x, \xi)$ 和 "相位" $e^{ix\xi}$ 之间的差异可以明显地得到保持. 更为精确地说我们要求

$$\forall \alpha, \quad |\partial_x^\alpha a(x, \xi)| \leqslant C_\alpha (1 + |\xi|)^m.$$

我们称一个满足 i) 和 ii) 这种类型的条件的 C^∞ 函数为一个 m 阶象征 (更为明确的定义在 I. 2.1 节中给出). 容易想见对于上述这两个条件我们可以做相当大的改动, 相关讨论参见本章习题 (习题 2.8, 2.9, 4.12).

历史上, 这种处理方式的效用最早是在寻找一个变系数椭圆算子 $P(x, D)$ 的拟基本解 (见 I.1.1 节) 的过程中体现出来的 (所谓椭圆是指对于 $\xi\in\mathbb{R}^n, \xi\neq 0$, 我们有 $p_m(x, \xi)\neq 0$). 事实上, 当我们试图求一个方程 $Pu=f$ 的形如 $u=a(x, D)f$ 的解的时候, 我们得到

$$Pu(x)=(2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}p(x, \xi+D)\, a(x, \xi)\, \hat{f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

其中

$$p(x, \xi+D)a=p(x, \xi)a(x, \xi)+\sum_{\alpha\neq 0}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha p(x, \xi)D^\alpha a.$$

在上面的和式中, 随着指标 α 的增大, 相应的项在 $|\xi|\to+\infty$ 时的行为是越来越好 (容易控制) 的: 如果我们取 $a(x, \xi)=\dfrac{1-\chi(\xi)}{p(x, \xi)}$ (因为对于足够大的 $|\xi|, p(x, \xi)\neq 0$), 我们可以验证, a 是一个 $-m$ 阶象征, 而且 $p(x, \xi+D)a=1+O(1/|\xi|)=1+r$, 其中 r 是一个 -1 阶象征. 因此, 我们能够写下等式 $Pu=f+Rf$, 这里 Rf 是一个比 f 具有更好光滑性的函数 (比如, 若 $f\in L^2$, 那么 Rf 及其梯度都在 L^2 内). 今后我们可以看到 (I.5.4 节), 我们可以把这一过程继续改进, 最终就像在 I.1.1 节中那样, 得到 $Rf\in C^\infty$.

最关键的事情, 是要建立一个 (包含象征及相应算子的) 框架, 使得我们可以 (近似地) 求一个 (微分或拟微分) 算子 $P(x, D)$ 的一个同类型的逆算子 $a(x, D)$: 这样我们就得到一个算子代数, 并且逆算子的象征基本上就是 "自然的候选对象" $a(x, \xi)=\dfrac{1}{p(x, \xi)}$.

我们注意到, 所谓近似在这里并不是对函数值而言的, 而是从它们的光滑性角度考虑: 一个 "小误差" 指的是一个 C^∞ 函数, 而不论实际上这个函数有多大！人们由此会担心, 这样一来这一理论的应用将被局限在对于函数奇性的研究上, 就像在 I.1.1 节中我们看到的那样

$$\text{若 } \Delta v=f, \text{ 那么 } \operatorname{sing\,supp} v=\operatorname{sing\,supp} f.$$

但是实际上, 这根本不是问题, 我们在第 II 章中将看到如何用拟微分算子的理论建立一些微分问题的解和已知条件之间的不等式; 该理论的近似性质反映在我们难以确定这些不等式中的常数的具体数值这一点上; 即使这样, 这些不等式的存在性仍然可以用来证明一大类问题的精确解的存在性 (参见第 II 章, II.C.1.2 节).

I.1.3　调和两个方面 (坐标空间 x 和相位空间 ξ)

上面简单描述的理论的特点是引进了象征这个强有力的概念. 例如, 和两个象征 $a(x, \xi)$ 和 $b(x, \xi)$ 通过 (1.2.1) 相关联的算子的乘积 $a(x, D)b(x, D)$ 至少在形式

上是和某个函数 $c(x, \xi)$ 通过同样的方式相关联的算子: $c(x, \xi)$ 本身也是一个象征这件事情是一个非常不平凡的结果,事实上这正是本章的核心内容 (定理 4.1). 和 I.1.1 节类似我们也有一种 "象征演算", 在此意义下 c 有渐进展开 (这一概念在第 I.2 节中定义)

$$c \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} a \, D_x^{\alpha} b,$$

其中最主要的项是 ab,就和常系数微分算子的情形一样.

有这样一套象征演算的好处在于,我们可以把关于算子的命题转化为关于函数的命题: 我们会看到很多这方面的例子 (特别是在第 I.5 节中).

此外,该理论的一个推论是下述 "拟局部性质": 对所有拟微分算子 A,

$$\text{sing supp } Au \subset \text{sing supp } u \quad (\text{参见 I.1.1 节}).$$

这表明一个算子 A 的作用尽管 "延展" 了函数 u 的支集,但是它并不影响 u 的奇点在 x 空间的局部化 (这一事实是难以直接从 (1.2.1) 看出来的).

对此做更为精细的讨论 (见第 II 章 II.B 节) 我们可以得到 u 的**波前集**的概念 (记作 $WF(u)$), 这个集合里的点 (x, ξ) 满足 $x \in \text{sing supp}\, u$, 并且 ξ 是 u 在 x 附近的**主导频率**. 我们将会证明

$$WF(Au) \subset WF(u).$$

这样我们看到拟微分演算和相应的波前集的概念使我们可以对所考虑的函数 "从 x 的角度" 和 "从 Fourier 的角度" 得到两方面信息. 系统性地 "对 x" 和 "对 ξ" 做局部化的过程称为微局部分析,将在第 II 章 A, B 两节中简述.

I.2 象征

I.2.1 定义和例子

定义 设 $m \in \mathbb{R}$, 我们记满足条件

$$\forall \alpha, \forall \beta, \quad \left| \partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} a(x, \xi) \right| \leqslant C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - |\beta|} \tag{2.1.1}$$

的函数 $a \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ 全体为 $S^m = S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, 同时引进记号 $S^{-\infty} = \bigcap_m S^m$.

S^m 的一个元素 a 称为一个 m 阶**象征**.

例 1 设 $a(x, \xi) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} a_{\alpha}(x) \xi^{\alpha}$, 其中 $a_{\alpha} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, 且每一个 a_{α} 及其任意阶导数都是有界的, 那么 $a \in S^m$: 我们称 a 是一个微分象征.

例 2 设 $a(\xi)$ 是一个 m 阶 (正) 齐次函数 (即 $\forall \lambda > 0$, $a(\lambda \xi) = \lambda^m a(\xi)$) 且当 $\xi \neq 0$ 时函数是 C^{∞} 的. 若 $\chi \in C_0^{\infty}$ 且在 0 点附近 $\chi = 1$, 那么 $\tilde{a}(\xi) = (1 - \chi(\xi)) a(\xi)$ 是一个 m 阶象征.

例 3 设 $p(x,\xi)$ 是对 $x\in\Omega$ (Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集) 定义的一个 m 阶微分象征. 设 p 在 Ω 中是椭圆的,就是说:

$$\forall x\in\Omega,\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n,\ \xi\neq 0,\ \ p_m(x,\xi)\neq 0.$$

对于 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$,和满足在 0 点附近 $\chi=1$ 的 $\chi\in C_0^\infty$,函数 $a(x,\xi)=\varphi(x)\dfrac{1-\chi(\xi/C)}{p(x,\xi)}$ 对于充分大的 C 是一个 $-m$ 阶象征 (参见 I.1.3 节中的讨论).

例 4 若 $\varphi\in\mathcal{S}$,则函数 $\varphi(\xi)$ 是一个 $-\infty$ 阶象征.

例 5 函数 $a(x,\xi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}$ 不是一个象征.

我们有下述基本性质:

$$\text{若 } a\in S^m\text{ , 则 } \partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a\in S^{m-|\beta|}, \tag{2.1.2}$$

$$\text{若 } a\in S^m, b\in S^{m'}\text{ , 则 } ab\in S^{m+m'}, \tag{2.1.3}$$

$$\text{若 } a\in S^m\text{ , 则 } a\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}). \tag{2.1.4}$$

最后,下述引理是很有用的:

引理 2.1.1 若 $a_1,\cdots,a_k\in S^0, F\in C^\infty(\mathbb{C}^k)$, 则 $F(a_1,\cdots,a_k)\in S^0$.

证明 既然 $\mathrm{Re}\,a_k$ 和 $\mathrm{Im}\,a_k$ 都是 S^0 的元素,我们可以假设 a_i 是实值函数,并且 $F\in C^\infty(\mathbb{R}^k)$. 于是我们有

$$\frac{\partial}{\partial x_j}F(a)=\sum\frac{\partial F}{\partial a_k}\partial_{x_j}a_k, \tag{2.1.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi_j}F(a)=\sum\frac{\partial F}{\partial a_k}\partial_{\xi_j}a_k. \tag{2.1.6}$$

我们对 p 用归纳法来证明形如 (2.1.1) 的估计对于所有形如 $F(a)$ 的函数和满足 $|\alpha|+|\beta|\leqslant p$ 的指标都成立. $p=0$ 的情形是显然的. 而对于 $|\alpha|+|\beta|\leqslant p+1$ 的情形,我们对 (2.1.5) 和 (2.1.6) 应用 Leibniz 公式,并考虑对各个偏导函数 $\dfrac{\partial F}{\partial a_k}(a)$ 的归纳假设,便可得到结论. □

我们还要提醒读者注意,一个象征 $a(x,\xi)$ $(x\in\mathbb{R}^n,\xi\in\mathbb{R}^n)$ 一般来说对于变量 $y=(x,x')$, $\eta=(\xi,\xi')(x'\in\mathbb{R}^m,\xi'\in\mathbb{R}^m,m\geqslant 1)$ 并不是一个象征,除非它是微分象征 (习题 2.1). 在实际应用中,很多其他的象征类也是非常有用的: 在习题 2.8 和 2.9 中我们将介绍一些这方面的内容.

I.2.2 象征的逼近

我们在 S^m 上定义一族半范数

$$|a|_{\alpha,\beta}^m=\sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\left\{(1+|\xi|)^{-(m-|\beta|)}\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right|\right\}.$$

这样我们得到一个完备空间 (更精确的说是一个 Fréchet 空间), 其中 $a_n \to a$ 意味着对于 $\forall\alpha, \forall\beta$, 有 $|a_n - a|^m_{\alpha,\beta} \to 0$. 容易看到在这个拓扑下, 由 (2.1.2) 和 (2.1.3) 定义的映射是连续的.

下面的逼近引理对于我们是有用的:

引理 2.2.1 设 $a \in S^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, 记 $a_\varepsilon(x, \xi) = a(x, \varepsilon\xi)$.那么 a_ε 在 S^0 中有界,且对于 $m > 0$,在 S^m 中,当 $\varepsilon \to 0$ 时, $a_\varepsilon \to a_0$.

证明 我们将证明,对于 $0 \leqslant m \leqslant 1, 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, 以及任意的 α 和 β,我们有 $|a_\varepsilon - a_0|^m_{\alpha,\beta} \leqslant C_{\alpha,\beta,m}\varepsilon^m$. 事实上,对于 $\beta = 0$,

$$\partial^\alpha_x(a_\varepsilon - a_0) = \varepsilon\xi \cdot \int_0^1 \partial_\xi\partial^\alpha_x a(x, t\varepsilon\xi)\mathrm{d}t,$$

由此得到

$$|\partial^\alpha_x(a_\varepsilon - a_0)| \leqslant C\int_0^{\varepsilon|\xi|}\frac{\mathrm{d}s}{1+s} = C\log(1+\varepsilon|\xi|),$$

我们需要的估计由 $\log(1+x) \leqslant C_m x^m (x \geqslant 0, m > 0)$ 就可以得到.

对于 $\beta \neq 0, \partial^\alpha_x\partial^\beta_\xi a_0 = 0$,而另一方面,

$$|\partial^\alpha_x\partial^\beta_\xi a_\varepsilon| \leqslant C_{\alpha,\beta}\varepsilon^{|\beta|}(1+\varepsilon|\xi|)^{-|\beta|},$$

最后由 $(1+|\xi|) \geqslant 1+\varepsilon|\xi|$ 就可以得到结果.

我们注意到在 S^0 中我们得不到 $a_\varepsilon \to a_0$. □

特别的,若 $\chi \in \mathcal{S}$ 且在 0 点附近 $\chi = 1, a \in S^m$, 那么象征 $a_\varepsilon(x, \xi) = \chi(\varepsilon\xi)\, a(x, \xi)$ 都是 $-\infty$ 阶的, 且对于所有的 $m' > m$,在 $S^{m'}$ 中有收敛关系式 $a_\varepsilon \to a$.

I.2.3 渐近和式 $\mathcal{S}$ 与 $\mathcal{S}'$ 中的古典拟微分象征

对于某个递减数列 $m_j \to -\infty\,(j \in \mathbb{N})$, 我们考虑象征 $a_j \in S^{m_j}$ (在实际应用中通常取 $m_j = m - j$ 或 $m_j = m - j/2$). 我们希望赋予和式 $\sum\limits_j a_j$ 某种意义, 因为它一般来说不会是一个收敛级数; 我们记

$$a \sim \sum a_j$$

(在考虑 $|\xi| \to +\infty$ 时的性态这一意义下的渐近和式), 如果有

$$\forall k \geqslant 0, \quad a - \sum_{j=0}^{k} a_j \in S^{m_{k+1}}.$$

为了更好的理解渐近展开这个概念, 我们先给出下述经典引理.

Borel 引理 设 (b_j) 是一个复数序列,则存在一个光滑函数 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $\forall j, f^{(j)}(0) = b_j$,也就是说当 $x \to 0$ 时有 $f(x) \sim \sum b_j \dfrac{x^j}{j!}$.

证明 我们取一个对 $|x|\leqslant 1$ 取值为 1, 对 $|x|\geqslant 2$ 取值为 0 的 C^∞ 函数 χ.

我们将证明可以选取一个适当的趋向于 $+\infty$ 的正数列 (λ_j) 使得由下式定义的函数

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty} b_j\frac{x^j}{j!}\chi(\lambda_j x)$$

具有我们需要的性质. 首先我们注意到上面的级数是简单收敛的. 对于整数 k 和 $j\geqslant k$, 上述级数中的第 j 项的 k 阶导数满足

$$f_j^{(k)}(x)=\sum_{0\leqslant \ell\leqslant k}\binom{k}{\ell}b_j\frac{x^{j-\ell}}{(j-\ell)!}\chi^{(k-\ell)}(\lambda_j x)\lambda_j^{k-\ell}.$$

因为 $\lambda_j x$ 在 χ 及其各阶导数的支集上都是有界的, 所以存在常数 C_k, 满足

$$\left|f_j^{(k)}(x)\right|\leqslant C_k|b_j|\lambda_j^{k-j}\frac{1}{(j-k)!}.$$

我们选择 $\lambda_j\geqslant 1+|b_j|$, 那么对 $x\in\mathbb{R}$, 级数 $\sum\limits_j\left|f_j^{(k)}(x)\right|$ 是一致收敛的, 由此保证 f 是 C^∞ 的, 且其导数可以由逐项求导得到. 特别地, 对每一个 k,

$$f^{(k)}(0)=b_k.$$

同样的引理对于 $\mathbb{C}$ 中的一个扇形区域上的全纯函数 $f=f(z)$ 也是成立的 (习题 2.6).

对一个象征的渐近和式的情形, 我们有下述性质

性质 2.3 存在 $a\in S^{m_0}$ 满足 $a\sim\sum a_j$, 而且我们还可以进一步要求 $\operatorname{supp} a\subset \cup\operatorname{supp} a_j$.

证明 我们只需对上面的引理做适当的修改, 把 $x\to 0$ 时的渐近性质换成 $1/|\xi|\to 0$ 时的渐近性质. 这样对于在 0 点附近取值为 1 的函数 $\chi\in C_0^\infty$, 我们考虑

$$a=\sum\tilde{a}_j=\sum(1-\chi(\varepsilon_j\xi))a_j,$$

其中 $\varepsilon_j\searrow 0$ 是一个下降得足够快的数列. 更精确地我们要求对于 $|\alpha|+|\beta|\leqslant j$,

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\tilde{a}_j\right|\leqslant 2^{-j}(1+|\xi|)^{1+m_j-|\beta|}.$$

因为 $1-\chi(\varepsilon\xi)$ 在 S^1 中趋向于 0, 因此根据逼近引理 2.2.1, 这是可以做到的. 这个和式在每一点都是一个有限和, 所以 $a\in C^\infty$.

对于给定的 α,β,k, 我们有, 对于 $N\geqslant|\alpha|+|\beta|$, $m_N+1\leqslant m_{k+1}$,

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\left(a-\sum_{j\leqslant N-1}\tilde{a}_j\right)\right|\leqslant(1+|\xi|)^{m_{k+1}-|\beta|},$$

所以

$$a-\sum_{j\leqslant k}a_j=a-\sum_{j\leqslant N-1}\tilde{a}_j+\sum_{k+1\leqslant j\leqslant N-1}\tilde{a}_j-\sum_{j\leqslant k}(a_j-\tilde{a}_j)$$

满足

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\left(a-\sum_{j\leqslant k}a_j\right)\right|\leqslant C_{\alpha,\,\beta,\,k}(1+|\xi|)^{m_{k+1}-|\beta|},$$

因为 $a_j-\tilde{a}_j\in S^{-\infty}$ 且 $\tilde{a}_j\in S^{m_j}$. □

出于类似的想法,我们引进下面的定义

定义 一个象征 $a\in S^m$ 被称作**古典**的,若 $a\sim\sum\limits_j a_j$,其中函数 a_j 对于 $|\xi|\geqslant 1$ 是一个 $m-j$ 阶齐次函数,换句话说对于 $|\xi|\geqslant 1,\lambda\geqslant 1,\ a_j(x,\,\lambda\xi)=\lambda^{m-j}a_j(x,\,\xi)$.

I.2.1 节中作为例子给出的前三类象征都是古典的.

有时候,我们还会 (对 "象征" 这个概念稍加滥用地) 把所有在 $|\xi|\neq 0$ 时 C^∞ 的函数 a 都称作象征: 在这个情况下我们约定要通过适当的方式在 $\xi=0$ 附近做一个截断;这样得到的两个象征之差都是 $S^{-\infty}$ 的. 特别地,所有齐次函数都是如此.

I.3 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$ 中的拟微分算子

现在我们来精确给出导论中提到过的定义.

I.3.1 $\mathcal{S}$ 上的作用

性质 3.1 如果 $a\in S^m,u\in\mathcal{S}$,那么等式

$$\mathrm{Op}\,(a)u(x)=(2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}a(x,\,\xi)\,\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

定义了 $\mathcal{S}$ 中的一个函数,而且

$$(a,\,u)\mapsto \mathrm{Op}\,(a)u$$

是连续的. 这样定义了一个由 S^m 映到 $\mathcal{S}$ 上线性算子空间的线性映射 Op,它是单射,且满足关系式

$$\begin{cases}[\mathrm{Op}\,(a),\,D_j]=\mathrm{i}\mathrm{Op}\,(\partial_{x_j}a),\\ [\mathrm{Op}\,(a),\,x_j]=-\mathrm{i}\mathrm{Op}\,(\partial_{\xi_j}a),\end{cases}\tag{3.1.1}$$

其中 x_j 表示函数 $x\mapsto x_j$ 定义的乘积算子.

证明 首先,因为 $\hat{u}\in\mathcal{S},a\in S^m$,我们有

$$|\mathrm{Op}\,(a)u(x)|\leqslant(2\pi)^{-n}(\sup|a(x,\,\xi)(1+|\xi|)^{-m}|)\int(1+|\xi|)^m|\hat{u}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi.$$

这表明 $\mathrm{Op}\,(a)u$ 是 (连续且) 有界的.

关系式 (3.1.1) 可以由分部积分很快得到. 比如,

$$\begin{aligned}\mathrm{Op}\,(a)D_j u(x) &= (2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\widehat{D_j u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\ &= (2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}a(x,\,\xi)\,\xi_j\,\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

而

$$D_j(\mathrm{Op}\,(a)u)(x) = -\mathrm{i}\left[(2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathrm{i}\xi_j a(x,\,\xi)\,\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \mathrm{Op}\,(\partial_{x_j}a)u(x)\right],$$

两式相减就得到 (3.1.1) 的第一式. 由这些关系式可以推出, $x^\alpha D^\beta(\mathrm{Op}\,(a)u)$ 是一些形如

$$\mathrm{Op}\,(\partial_\xi^{\alpha'}\partial_x^{\beta'}a)(x^{\alpha''}D^{\beta''}u)\ \ (\text{其中 } \alpha'+\alpha''=\alpha,\ \beta'+\beta''=\beta)$$

的项的线性组合,因此 $x^\alpha D^\beta(\mathrm{Op}\,(a)u)$ 是由 u 在 $\mathcal{S}$ 中的一个半范数和 a 在 S^m 中的一个半范数的乘积所控制的, 这样就得到我们需要的连续性.

最后, 为了证明 Op 是单射, 我们假设对于所有的 $u \in \mathcal{S}$, $x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}a(x,\,\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0.$$

我们固定 x, 首先可以注意到函数

$$b(\xi) = \frac{a(x,\,\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}+\frac{n}{4}+\frac{1}{2}}}$$

在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中, 且和所有形如

$$v(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}+\frac{n}{4}+\frac{1}{2}}\overline{\hat{u}(\xi)};$$

的函数正交. 但是当 u 取遍 $\mathcal{S}$ 时, v 取遍 $\mathcal{S}$, 这样由 $\mathcal{S}$ 在 L^2 中的稠密性得到 $b=0$. □

定义 对于 $a \in S^m$, 算子 $\mathrm{Op}\,(a)$ 是**以 a 为象征的拟微分算子**. 我们称一个拟微分算子是 m 阶的, 如果它的象征在 S^m 中.

记号 和微分算子的情形类似 (参见 (1.2.1)), 我们经常记 $\mathrm{Op}\,(a) = a(x,\,D)$. 如果不会产生混淆, 我们用表示象征的字母的大写形式来记相应的拟微分算子: $A = \mathrm{Op}\,(a)$.

I.3.2 算子的核函数与共轭

I.3.2.1 算子的核函数

首先假设 $a \in S^{-\infty}$. 对于 $u \in \mathcal{S}$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Op}\,(a)u(x) &= (2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}a(x,\,\xi)\,\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\ &= (2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}a(x,\,\xi)\,\mathrm{d}\xi\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}u(y)\,\mathrm{d}y\\ &= (2\pi)^{-n}\int u(y)\,\mathrm{d}y\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\xi}a(x,\,\xi)\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

算子 $\mathrm{Op}\,(a)$ 的核函数 K 于是由下式给出:

$$K(x,\,y) = (2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\xi}a(x,\,\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{3.2.1}$$

当 a 是 S^m 中函数时, 上式有下述延拓

$$K(x,\,y) = (2\pi)^{-n}(\mathcal{F}_\xi a)(x,\,y-x), \tag{3.2.2}$$

其中 $\mathcal{F}_\xi a$ 表示 a 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ 中对于 ξ 的 Fourier 变换. 由 Fourier 逆变换公式我们得到

$$a(x,\,\xi) = \mathcal{F}_{y\to\xi}[K(x,\,x-y)]. \tag{3.2.2$'$}$$

以上 (3.2.2), (3.2.2′) 两式在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ 中建立了象征和算子核函数之间的一个双射. 当然, 如果 a 仅是 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ 中的元素, 那么相应的算子把 $\mathcal{S}$ 映到 $\mathcal{S}'$, 而不是像性质 3.1 中那样把 $\mathcal{S}$ 映到 $\mathcal{S}$. 这表明作为拟微分算子的核函数 K 的缓增分布具有某些其他缓增分布不具备的性质 (参见习题 3.1 和 3.2). 在本课程中我们将不需要用到这些性质.

I.3.2.2 算子的共轭算子

对任何一个由 $\mathcal{S}$ 到 $\mathcal{S}$ 的算子 A, 我们希望找到一个由 $\mathcal{S}$ 到 $\mathcal{S}$ 的算子 A^*, 满足

$$\forall\, u \in \mathcal{S},\ \forall\, v \in \mathcal{S}, \qquad (Au,\,v) = (u,\,A^*v).$$

注意由我们已经看到过的稠密性论据, 如果 A^* 存在, 则它是唯一的; 我们称 A^* 为 A 的**共轭算子**.

A^* 的存在性使我们可以根据下式定义 $A : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$,

$$\forall u \in \mathcal{S}',\ \forall v \in \mathcal{S}, \qquad (Au,\,v) = (u,\,A^*v),$$

这里对于 $u \in \mathcal{S}', v \in \mathcal{S}$, $(u,\,v)$ 表示 $\langle u,\,\overline{v}\rangle$ [①], 而 $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ 是由对偶性定义的: 我们于是可以有

$$\langle Au,\,v\rangle = \langle u,\,\overline{A^*\overline{v}}\rangle. \tag{3.2.3}$$

① 译校者注: 参见 0.5 节.

这样的操作在定义 $\mathcal{S}'$ 上的 Fourier 变换时已经用到过, 因为那里我们有

$$\mathcal{F}^* = \overline{\mathcal{F}}.$$

现在我们对两类拟微分算子来研究这些问题:

a) 若 $P = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha$ 是一个系数为缓增 C^∞ 函数的微分算子, 那么对于所有 $\mathcal{S}$ 中的函数 u 和 v, 我们有

$$(Pu,\, v) = (u,\, P^*v),$$

其中 $P^*v = \sum_{|\alpha|\leqslant m} D^\alpha(\overline{a}_\alpha v)$.

实际上, $(au,\, v) = (u,\, \overline{a}v)$, 而

$$\begin{aligned}(D_j u,\, v) &= \int D_j u\overline{v}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{i}\int (\partial_j u)\,\overline{v}\,\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{i}\int u\,(\partial_j \overline{v})\,\mathrm{d}x = \int u\,\overline{D_j v}\,\mathrm{d}x = (u,\, D_j v).\end{aligned}$$

这样 P^* 也是一个系数为缓增 C^∞ 函数的微分算子. 我们还注意到它的主象征就是 P 的主象征的共轭函数.

b) 设 $a(D)$ 是一个常系数拟微分算子 (就是说它的象征 a 不依赖于 x). 对于 $\mathcal{S}$ 中的元素 u,v, 我们有

$$(a(D)u,\, v) = (2\pi)^{-n}(a\hat{u},\, \hat{v}) = (2\pi)^{-n}(\hat{u},\, \overline{a}\hat{v}) = (u,\, \overline{a}(D)v).$$

这样 $a(D)^* = \overline{a}(D)$.

在 a) 和 b) 这两种情形我们所考虑的拟微分算子的共轭都是同阶的拟微分算子. 这在一般情况下也是成立的, 但是证明会比较长.

在结束本小节之前, 我们还注意到, 如果 A^* 存在, 它的核函数 K^* 可以由 A 的核函数 K 很方便的表示出来. 事实上, 根据算子核函数的定义和公式 (3.2.3), 我们有

$$\begin{aligned}\langle K(x,\, y),\, u(y)v(x)\rangle &= \langle Au,\, v\rangle = \langle u,\, \overline{A^*\overline{v}}\rangle\\ &= \overline{\langle \overline{u},\, A^*\overline{v}\rangle}\\ &= \overline{\langle K^*(y,\, x),\, \overline{v}(x)\overline{u}(y)\rangle}.\end{aligned}$$

最后,

$$K^*(y,\, x) = \overline{K(x,\, y)}. \tag{3.2.4}$$

I.3.2.3 拟微分算子的共轭算子

设 A 是一个象征 $a \in S^m$ 的拟微分算子. 我们在假定存在的前提下计算 A 的共轭算子. 为此, 根据前两节的结论, 我们只要验证, 若 K 是 A 的核函数 (由 (3.2.2) 式给出), 那么由 (3.2.4) 定义的核函数 K^* 对应的算子把 $\mathcal{S}$ 映到 $\mathcal{S}$. 事实上我们将要证明它是一个拟微分算子. 为此, 我们需要证明在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ 中由 K^* 通过 (3.2.2′) 定义的分布 a^* 是一个象征. 为了建立一个由 a 出发得到 a^* 的公式, 我们最好先假设 a (因此 a^*) 是 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ 的一个元素, 然后再利用 (3.2.2), (3.2.2′) 和 (3.2.4) 中考虑的映射的连续性将其延拓到 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ 上. 这样我们有

$$K^*(x, y) = \overline{K(y, x)} = (2\pi)^{-n} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\xi} \overline{a(y, \xi)} \, \mathrm{d}\xi$$

及

$$\begin{aligned} a^*(x, \xi) &= \int K^*(x, x-y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi} \, \mathrm{d}y \\ &= (2\pi)^{-n} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}y(\eta-\xi)} \overline{a}(x-y, \eta) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}\eta \\ &= (2\pi)^{-n} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\eta} \overline{a}(x-y, \xi-\eta) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}\eta. \end{aligned}$$

所以 $a \mapsto a^*$ 就是和指数振荡因子 $(2\pi)^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\eta}$ 做卷积. 直接验证这一操作把 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ 映到 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ 也是容易的, 因为 (参见习题 4.9.a) $(2\pi)^{-n}\exp(-\mathrm{i}x\xi)$ 关于 (x, ξ) 的 Fourier 变换 $\exp(\mathrm{i}\hat{x}\hat{\xi})$ 是一个 C^∞ 缓增函数, 因此是 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ 的一个乘子. 关键的步骤是下面的定理, 它是象征演算的两个基本结果之一.

定理 3.2.3 如果 $a \in S^m$, 那么 $a^* \in S^m$, 且

$$a^*(x, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{a}(x, \xi).$$

特别地, 如果 $A = \mathrm{Op}\,(a)$ 是一个 m 阶拟微分算子, 那么 $A^* = \mathrm{Op}\,(a^*)$ 也是一个 m 阶拟微分算子, 因而 A 可以延拓成一个从 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的算子.

这个定理的证明用到一些相当精细的估计; 尽管这是拟微分理论的核心部分, 心急的读者还是可以略去证明的细节 (而不影响对下文的理解), 也正是因为这个原因我们把这个证明放在附录里面 (另一个证明在习题 4.11 中给出).

I.4 算子的复合

设 A_1 和 A_2 是两个拟微分算子. 对 $u \in \mathcal{S}$ 我们有

$$A_1 A_2(u)(x) = (2\pi)^{-n} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} a_1(x, \xi) \widehat{A_2 u}(\xi) \mathrm{d}\xi$$

和

$$\widehat{A_2u}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y(\xi-\eta)} a_2(y,\, \eta)\hat{u}(\eta)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta,$$

因此

$$A_1A_2u(x) = (2\pi)^{-2n} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}y\eta+\mathrm{i}\xi(x-y)} a_1(x,\, \xi)a_2(y,\, \eta)\hat{u}(\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}y;$$

形式上,如果把 A_1A_2 记为一个算子 B,那么我们有

$$b(x,\, \xi) = (2\pi)^{-n} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-y)(\xi-\eta)} a_1(x,\, \eta)a_2(y,\, \xi)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta. \tag{4.1}$$

正如 I.3.2.3 节中一样, (对于固定的 $(x,\, \xi)$) 定义 b 的积分是一个关于变量 $(y,\, \eta)$ 的卷积. 与 I.3.2.3 节中相同的证明给出了象征演算的第二个基本定理.

定理 4.1 若 $a_1 \in S^{m_1}$, $a_2 \in S^{m_2}$,我们有 $\mathrm{Op}(a_1)\mathrm{Op}(a_2) = \mathrm{Op}(b)$,其中 $b = a_1\#a_2 \in S^{m_1+m_2}$ 由 (4.1) 给出, 且 $b \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a_1 D_x^\alpha a_2$.

当然,对于 a_1,a_2 都是微分象征的情形,我们可以用 Leibniz 法则验证这个定理,而且此时渐近展式是精确的 (习题 4.1).

推论 4.1 如果 $a_1 \in S^{m_1}, a_2 \in S^{m_2}$,那么算子 A_1 和 A_2 的交换子

$$[A_1,\, A_2] = A_1A_2 - A_2A_1$$

是一个 $m_1 + m_2 - 1$ 阶算子,且其象征 b 等于

$$b = \frac{1}{\mathrm{i}}\{a_1,\, a_2\} \quad \mathrm{mod}\ S^{m_1+m_2-2}.$$

这里我们用到函数 $f(x,\, \xi)$ 和 $g(x,\, \xi)$ 的 Poisson 括号

$$\{f,\, g\} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial \xi_j}\right).$$

推论 4.1 的证明 算子 A_1A_2 和 A_2A_1 的象征 b_1 和 b_2 满足:

$$b_1 \sim \sum \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a_1 D_x^\alpha a_2,$$
$$b_2 \sim \sum \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a_2 D_x^\alpha a_1.$$

这样,对于 $b = b_1 - b_2$,

$$\begin{aligned} b &= \sum_j \left(\frac{\partial a_1}{\partial \xi_j}D_j a_2 - \frac{\partial a_2}{\partial \xi_j}D_j a_1\right) \quad \mathrm{mod}\ S^{m_1+m_2-2} \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}}\{a_1,\, a_2\} \quad \mathrm{mod}\ S^{m_1+m_2-2}. \end{aligned}$$

□

在第 I.6 节我们将看到, 在一个流形 M 上, 一个算子 A 的主象征是流形的**余切丛** T^*M 上的函数, 而两个函数的 Poisson 括号可以内蕴地定义 (即不依赖于局部坐标 (x, ξ) 的选择).

定理 4.1 建立了我们在导论中提到过的 "象征演算"(另一个证明在习题 4.10 和 4.11 中给出).

I.5 拟微分算子的作用与 Sobolev 空间

I.5.1 L^2 上的作用

定理 5.1 如果 $a \in S^0$, 那么 $a(x, D)$ 是 L^2 上的有界线性算子.

我们注意到这一基本结论在象征 $a(x, \xi)$ 只依赖于 x 或者只依赖于 ξ, 或者 $a(x, \xi) = b(x)c(\xi)$ 的时候是显然的: 在这些特殊情况下, 算子的范数也可以很容易地作为 $\sup|a|$ 的函数被计算出来.

而一般的情况 (包括算子范数的计算) 则要复杂得多, 这要求对象征 a 的一定数量的导数有所控制.

这里我们给出一个使用象征演算的证明: 其他的变体在习题中将会提到 (习题 5.2 和 5.3).

以下我们用 $|u|_0$ 记 u 在 L^2 中的范数.

证明 证明的想法是这样的: 因为 $|Au|_0^2 = (Au, Au) = (A^*Au, u)$, 不等式 $|Au|_0^2 \leqslant M|u|_0^2$ 也可以写做 $(Bu, u) \geqslant 0$, 其中 $B = M - A^*A$ 是 0 阶自共轭算子. 为了证明对于充分大的 M, 算子 B 满足 $(Bu, u) \geqslant 0$, 最简单的办法是把 B 也写成 $B = C^*C$ 的形式, 我们就是这么做的.

a) 我们选择 $M \geqslant 2\sup|a(x, \xi)|^2$, 并取

$$c(x, \xi) = (M - |a(x, \xi)|^2)^{1/2}.$$

根据引理 2.1.1, 我们知道 $c \in S^0$; 而定理 4.1 推出 $C^*C = M - A^*A + R, r \in S^{-1}$(一如往常, 我们总是在近似的意义下实现我们的设想). 由此 $|Au|_0^2 \leqslant M|u|_0^2 + (Ru, u)$.

b) 现在要来控制 "误差"(Ru, u) 的上界. 我们假设 $r \in S^{-k}, k \geqslant 1$: 那么因为 $|Ru|_0^2 = (R^*Ru, u)$, 只要 R^*R 在 L^2 上是连续的, 那么 R 也是, 而且 $\|R\|_{L^2\to L^2} \leqslant \|R^*R\|_{L^2\to L^2}^{1/2}$. 现在 (关键 !) $r^*\#r \in S^{-2k}$: 反复使用这一推理过程, 我们看到其实只需证明, 存在某个充分大的 k, 使得任意以 $r \in S^{-k}$ 为象征的算子在 L^2 上都是连续的.

c) 如果我们是在 $\mathbb{R}^n$ 中考虑问题, 那么我们取 $k = n + 1$: $a(x, D)$ 的核函数

$K(x, y)$ 就会是一个连续有界的函数, 原因是, 根据 (3.2.2),

$$|K(x, y)| \leqslant (2\pi)^{-n} \int |a(x, \xi)| \, \mathrm{d}\xi.$$

不仅如此,$(x_j - y_j)K(x, y)$ 还是 $\mathrm{i}\dfrac{\partial a}{\partial \xi_j}(x, D)$ 的核函数, 它具有比 a"更加好" 的性质; 重复 $(n+1)$ 次, 我们最终得到 $(1 + |x - y|^{n+1})|K(x, y)| \leqslant$ 常数. 特别地 K 在无穷远的递减性质推导出:

$$\int |K(x, y)| \, \mathrm{d}y \leqslant C, \quad \int |K(x, y)| \, \mathrm{d}x \leqslant C. \tag{5.1.1}$$

d) 我们有一个经典的结果: 具有满足 (5.1.1) 的连续核函数的算子在 L^2 上是有界的 (且范数最多是 C). 事实上,

$$\begin{aligned} |Au(x)|^2 &\leqslant \int |K(x, y)||u(y)|^2 \, \mathrm{d}y \int |K(x, y)| \, \mathrm{d}y \\ &\leqslant C \int |K(x, y)||u(y)|^2 \, \mathrm{d}y \end{aligned}$$

因此

$$\int |Au(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leqslant C \int |u(y)|^2 \, \mathrm{d}y \int |K(x, y)| \, \mathrm{d}x \leqslant C^2 \int |u(y)|^2 \, \mathrm{d}y.$$

这样就完成了定理的证明. □

I.5.2 在 Sobolev 空间上的作用

我们先回顾一下这些空间的定义.

定义 对 $s \in \mathbb{R}$,

$$H^s = H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}', \int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi < +\infty \right\}.$$

我们还可以注意到算子 $(1 + |D|^2)^{s/2}$ 是从 H^s 到 L^2 上的等距映射. 相应的范数会被记作 $|\cdot|_s$:

$$|u|_s^2 = (2\pi)^{-n} \int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi.$$

对于 $s \in \mathbb{N}$, 容易证明 (习题 5.6):

$$H^s = \{u \in L^2, \forall \alpha, |\alpha| \leqslant s, \partial^\alpha u \in L^2\},$$

当然我们特别地有 $H^0 = L^2$.

这些空间的重要性在于, 它们是建立在 L^2 基础上的一族空间, 可以用来标记函数的正则性 (就像 Hölder 函数类 C^α 是建立在 L^∞ 上用来标记函数正则性的一族空间一样).

定理 5.1 和定理 4.1 马上可以给出下述性质.

性质 5.2 如果 $a \in S^m$, 那么对于所有的 s, 算子 $a(x, D)$ 把 H^s 映到 H^{s-m}.

I.5.3　(弱形式的)Gårding 不等式

如果 $a = a(D)$ 是常系数的,且 $a(\xi) \geqslant 0$,那么算子 $a(D)$ 按照下述意义是“正”的: $\forall u \in \mathcal{S}, (a(D)u, u) \geqslant 0$.

在一般情况下,我们有一系列的“Gårding 不等式”将象征的正性与算子的正性联系起来,其中包含一个适当的“误差”项.

我们有下述“强”Gårding 不等式: 如果 $a \in S^{2m+1}$ $(m \in \mathbb{R})$, $\mathrm{Re}\, a \geqslant 0$, 那么 $\mathrm{Re}\,(a(x, D)u, u) \geqslant -C|u|^2_{H^m}$. 换句话说, 我们在这里得到的下界和当象征 a 是 $2m$ 阶时不对正性做任何假设可以得到的下界具有同一形式: 因为这个原因, 该不等式也被称作“增加一重可微性的 Gårding 不等式”. 在这里,我们将只证明“弱形式”的 Gårding 不等式.

性质 5.3　如果 $a \in S^{2m}$,并且对于 $|\xi| \geqslant R$ 和 $c > 0$, $\mathrm{Re}\, a(x, \xi) \geqslant c(1+|\xi|^2)^m$,那么对所有的 N, 存在常数 C_N 满足:

$$\mathrm{Re}\,(Au, u) + C_N|u|^2_{-N} \geqslant \frac{c}{2}|u|^2_m.$$

证明　首先我们有 $\mathrm{Re}\,(Au, u) = \left(\dfrac{A+A^*}{2}u, u\right)$; 因为 $a^* = \overline{a} + S^{2m-1}$,我们得到 $b = \dfrac{a+a^*}{2} = \mathrm{Re}\, a + d$,其中 $d \in S^{2m-1}$. 这样当 $|\xi|$ 充分大时

$$\begin{aligned} e = b - \frac{3}{4}c(1+|\xi|^2)^m &\geqslant \frac{c}{4}(1+|\xi|^2)^m\left(1 - \frac{4|d|}{c(1+|\xi|^2)^m}\right) \\ &\geqslant \frac{c}{8}(1+|\xi|^2)^m. \end{aligned}$$

象征 $(1+|\xi|^2)^{-m}e$ 是 0 阶的,且对于充分大的 $|\xi|$ 它的取值远离 0 点: 这样根据引理 2.1.1,我们知道对于某个适当选取的在 0 点附近取值为 1 的 $\chi \in C_0^\infty$,象征 $f = e^{1/2}(1-\chi(\xi))$ 是 S^m 中元素. 这样我们可以找到 $g \in S^{2m-1}$ 使得 $f^* \# f = e + g$,于是 $(Bu, u) \geqslant \frac{3}{4}c|u|^2_m + (Gu, u)$. 因为 $(Gu, u) = ((1+|D|^2)^{-m/2}Gu\,,\ (1+|D|^2)^{m/2}u)$,所以我们最后由 Cauchy–Schwarz 不等式可以得到

$$(Bu, u) \geqslant \frac{3}{4}c|u|^2_m - \text{常数} \cdot |u|_m|u|_{m-1}.$$

我们注意到对于所有的 $\varepsilon > 0$ 和 N,

$$|u|_{m-1} \leqslant \varepsilon|u|_m + C_{\varepsilon, N}|u|_{-N},$$

因为它可以由下述简单的不等式推导出来:

$$(1+|\xi|^2)^{m-1} \leqslant \varepsilon^2(1+|\xi|^2)^m + C^2_{\varepsilon, N}(1+|\xi|^2)^{-N}.$$

在不等式 $2ab \leqslant \eta a^2 + \frac{1}{\eta}b^2$ 中取 $a = |u|_m$, $b = |u|_{-N}$,我们最终得到 $\mathrm{Re}\,(Au, u) = (Bu, u) \geqslant \frac{c}{2}|u|^2_m - C_N|u|^2_{-N}$,也就是我们想要证明的结论. □

I.5.4 椭圆算子的逆

现在我们来完成导论中提到的构造拟基本解的方法.

性质 5.4 若 $a \in S^m$,则条件

i) $\exists b \in S^{-m}; a(x, D)b(x, D) - \mathrm{id} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$

和

ii) $\exists b \in S^{-m}; b(x, D)a(x, D) - \mathrm{id} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$

是等价的. 由它们可以推出

iii) 存在某个 $C > 0$ 使得当 $|\xi| \geqslant C$ 时, $|a(x, \xi)| \geqslant C|\xi|^m$.

反之,如果 iii)成立,那么存在 $b \in S^{-m}$ 满足 i) 和 ii),并且所有满足 i)或 ii)的 b' 在 mod $S^{-\infty}$ 意义下都和 b 相等. 一个象征满足 iii) 的 m 阶算子 A 被称作是**椭圆**的(相应的象征也被称为椭圆的).

证明 若 $b', b'' \in S^{-m}$ 满足 $AB' - \mathrm{id} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$, $B''A - \mathrm{id} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$, 我们有

$$B'' - B' = B''(\mathrm{id} - AB') + (B''A - \mathrm{id})B' \in \mathrm{Op}(S^{-\infty}),$$

这样我们就有

$$B'A - \mathrm{id} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty}) \text{ 和} AB'' - \mathrm{id} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty}).$$

在另一方面, i) 或者 ii) 推出 $a(x, \xi)b(x, \xi) - 1 \in S^{-1}$,并且当 $|\xi|$ 充分大时

$$1/2 \leqslant |a(x, \xi)||b(x, \xi)| \leqslant C|a(x, \xi)||\xi|^{-m},$$

也就是说推出 iii).

反之,如果 a 是椭圆的,我们定义

$$b = (1 + |\xi|^2)^{-m/2} F(a(1 + |\xi|^2)^{-m/2}),$$

其中 F 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑函数,且当 z 充分大时 $F(z) = 1/z$. 由引理 2.1.1 可以得到 $b \in S^{-m}$,且对于某个具有紧支集的函数 χ 我们有 $ab = 1 + \chi(\xi)$.

这样, 再应用定理 4.1,就可以表明

$$a(x, D)b(x, D) = \mathrm{id} - r(x, D), \quad r \in S^{-1}.$$

现在对 $k \geqslant 0$,定义 $b_k(x, D) = b(x, D)r(x, D)^k \in \mathrm{Op}(S^{-m-k})$,我们应用性质 2.3,取 $b' \sim \sum_{k \geqslant 0} b_k \in S^{-m}$,可以发现:

$$\begin{aligned} AB' &= A\left(B' - \sum_{j<k} B_j\right) + AB\sum_{j<k} R^j = (\mathrm{id} - R)\sum_{j<k} R^j + \mathrm{Op}(S^{-k}) \\ &= \mathrm{id} - R^k + \mathrm{Op}(S^{-k}) = \mathrm{id} + \mathrm{Op}(S^{-k}), \end{aligned}$$

即得 i).

通过类似的推理我们可以构造满足 $B''A - \mathrm{id} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$ 的 B'',再利用开头得到的结果就可以完成性质的证明了. □

我们应当清楚,存在 $BA - \mathrm{id} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$ 意义下的近似“左逆”并不说明 A 是单射,但 $\ker A$ 是由 C^∞ 函数构成的;更一般的,$Au \in C^\infty$ 说明 $u \in C^\infty$. 例如,在 $\mathbb{R}$ 上, $A = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 是椭圆的, 它的核是由常数函数构成的. 同样,存在一个近似“右逆”也只能让我们近似地解方程 $Au = f$. 但是,如果 i) 被满足,那么为了求出 $Au = f$ 的一个解 $u = Bv$,我们只需解 $v + Kv = f$,其中 $Kv(x) = \int k(x, y)v(y)\mathrm{d}y$ 具有一个光滑核函数 $k \in C^\infty$.

比方说我们现在试图对于 Laplace 算子 $A = \Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$, 和 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,在 0 点附近局部地解方程 $Au = f$.

设 β_r 是以原点为中心,半径为 r 的球,我们可以在 $L^\infty(\beta_r)$ 中解方程 $v + RK\tilde{v} = f$,其中 $\tilde{v}$ 是 v 通过在 β_r 外取 0 值得到的延拓, R 是取 β_r 上的限制. 事实上,如果我们记 $v = Gv, Gv = f - RK\tilde{v}$,由

$$|RK\tilde{v}|_{L^\infty(\beta_r)} \leqslant \sup_{|x| \leqslant r, |y| \leqslant r} |k(x, y)|\,|v|_{L^\infty(\beta_r)} r^n$$

我们可以看到当 r 充分小时,G 在 $L^\infty(\beta_r)$ 上是一个压缩算子.

取 $u = B\tilde{v}$,我们有 $Au = AB\tilde{v} = \tilde{v} + K\tilde{v}$ 和 $A(Ru) = v + RK\tilde{v} = f$; Ru 就是我们要的局部解. 正如我们在 I.1.1 节中说明的那样,Ru 的确是 C^∞ 的.

性质 5.4 的另一个有用的推论是存在下述先验不等式: 若 $a \in S^m$ 是 (在 iii) 的意义下,也就是说在 $\mathbb{R}^n$ 上是一致) 椭圆的, 那么对于所有的 $s \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{R}$,存在 $C_s, C_{N,s}$,使得对于所有的 $u \in \mathcal{S}$:

$$|u|_{s+m} \leqslant C_s|Au|_s + C_{N,s}|u|_{-N}.$$

(将 Gårding 不等式 (性质 5.3) 应用于 A^*A 也能够得到这一不等式). 这一不等式表明椭圆算子在除开一个小余项的意义下能够控制和算子阶数相同数目的导数. (关于这一问题参见习题 5.12, 5.13, 5.14, 也可以参见 6.5, 6.6 和 6.7).

I.6 $\mathbb{R}^n$ 中开集上的算子

到目前为止,我们所考虑的都是对 $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 定义的象征,相应的算子都作用在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上.

在实际应用中,我们经常会遇见定义在 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 Ω 上的象征. 我们希望把它们和作用在 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 上的算子联系起来: 这一点可以通过我们下面将要介绍的方法做到,具体地说, 我们将巧妙地引进一系列截断函数.

I.6.1 拟局部性质

性质 6.1 设 $a \in S^m$,并设 K 是 $a(x, D)$ 的核函数. 那么对于 $x \neq y$, K 是 C^∞ 的. 特别地,对任意的 $u \in \mathcal{S}'$,

$$\text{sing supp } a(x, D)u \subset \text{sing supp } u. \tag{6.1.1}$$

证明 对 $x \neq y$,取 $\chi, \psi \in C_0^\infty$ 使满足在 x 附近 $\chi = 1$,在 y 附近 $\psi = 1$,且 $\operatorname{supp} \chi \cap \operatorname{supp} \psi = \varnothing$. 函数 $\tilde{K} = \chi(x)K(x, y)\psi(y)$ 是算子 $\chi a \psi$ 的核函数,后者的象征是 $-\infty$ 阶的,原因是根据定理 4.1,$\chi a \psi \sim 0$;所以 $\tilde{K} \in C^\infty$,也就是说对于 $x \neq y, K \in C^\infty$. 如果 $x_0 \notin \text{sing supp } u$,找一个在 x_0 附近取值为 1 的 $\psi \in C_0^\infty$, 那么 $\psi u \in C_0^\infty$,而且在等式

$$\chi A u = \chi A \psi u + \chi A(1 - \psi)u$$

中,如果 ψ 在 $\operatorname{supp} \chi$ 附近取值为 1, 那么算子 $B = \chi A(1 - \psi)$ 的象征 $b \in S^{-\infty}$: 为了得到 (6.1.1),我们只需证明 $b(x, D)\mathcal{S}' \subset C^\infty$.

对于任意的 $\alpha, x \mapsto D_x^\alpha(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}b(x, \xi))$ 是取值在 $\mathcal{S}$ 中的连续映射,且

$$D^\alpha(Bu) = (2\pi)^{-n}\langle \tilde{u}, D_x^\alpha(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}b(x, \xi))\rangle$$

(这是 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$ 之间的对偶): 这样 $D^\alpha(Bu)$ 是连续的,而且 $Bu \in C^\infty$. □

(6.1.1) 也被称作 “拟局部” 性质.

I.6.2 局部象征与开集上的算子

定义 在开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上,我们定义集合 $S_{\text{loc}}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$,它是由对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 满足 $\varphi a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ 的函数 $a \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ 构成的.

对 $a \in S_{\text{loc}}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$,常用的公式

$$a(x, D)u = (2\pi)^{-n} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}a(x, \xi)\hat{u}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

定义了一个从 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 的算子. 我们也可以把它限制到 $\mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ 或者 $C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ 的算子.

下面的性质将阐明这样的算子和由全空间上定义的算子在一个开集上取限制得到的算子之间的关系.

性质 6.2 设连续线性算子 $A : C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ 满足对于所有的 $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi A \psi \in \operatorname{Op}(S^m)$. 那么存在 $a' \in S_{\text{loc}}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ 使得 $A = a'(x, D) + R$, 其中 R 是一个核函数在 $C^\infty(\Omega \times \Omega)$ 中的算子. 这里象征 a' 在 $\bmod S_{\text{loc}}^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ 的意义下是唯一的.

定义 在性质 6.2 所描述的情况下,我们称 A 是 Ω 上的一个拟微分算子,并把 a' 在 $S^m_{\text{loc}}/S^{-\infty}_{\text{loc}}$ 中的等价类称作 A 的象征.

证明 a) 我们假设存在一个函数列 $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega)$,使得

i) $\forall x \in \Omega,\ \sum\limits_j \psi_j(x) = 1$,

ii) 对任何紧集 $K \subset \Omega$,只有有限个形如 $\operatorname{supp}\psi_j$ 的子集与 K 相交.

这样的一族函数被称作 "局部有限 (条件 ii)) 的单位分解 (条件 i))"(参见习题 6.1).

b) 设 ψ_j 满足 a) 中的条件,记 $\psi_j A \psi_k = A_{jk} \in \operatorname{Op}(S^m)$. 对 $u \in C_0^\infty(\Omega)$,我们有

$$Au = \sum_k A\psi_k u = \sum_{j,\,k} \psi_j A \psi_k u = \sum{}' A_{jk} u + \sum{}'' A_{jk} u,$$

其中 $\sum{}'$ 表示对于所有满足 $\operatorname{supp}\psi_j \cap \operatorname{supp}\psi_k \neq \varnothing$ 的 j, k 求和.

函数 $a' = \sum{}' a_{jk} \in S^m_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$,理由是如果 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,和式 $\varphi a' = \sum{}' \varphi a_{jk}$ 中只有有限多项是 S^m 的元素.

如果 K 是 A 的核函数的话,由 $\sum{}''$ 定义的算子 Ru 具有核函数

$$\sum{}'' \psi_j(x) K(x,\,y) \psi_k(y).$$

因为当 $x \neq y$ 时 K 是 C^∞ 的 (性质 6.1),所以该和式在局部是有限多个 C^∞ 加项之和, 整个和式也因此在 $C^\infty(\Omega \times \Omega)$ 中.

c) 公式 (3.2.2′) 表明如果 $K \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ 是 $b(x,\,D)$ 的核函数,那么 $b \in S^{-\infty}$. 当 a 的核函数在 $C^\infty(\Omega \times \Omega)$ 中时将这一点应用于算子 $\varphi a'(x,\,D)\psi$,我们得到 $a' \in S^{-\infty}_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$,证毕. □

I.6.3 恰当支撑算子

定义 一个连续线性算子 $A: C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ 被称作**具有恰当支撑的**,如果对任何紧子集 $K \subset \Omega$,存在紧子集 $K' \subset \Omega$ 满足

$$\operatorname{supp} u \subset K \Rightarrow \operatorname{supp} Au \subset K',\text{且在 } K' \text{ 上 } u = 0 \ \Rightarrow \ \text{在 } K \text{ 上 } Au = 0.$$

这个定义的要点在于, A 把 C_0^∞ 映到 C_0^∞,因此 A^* 可以延拓成一个 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 到自身的算子: 这样我们就不用再考虑那些关于函数支集的条件了.

而且,下述性质表明,在 "mod C^∞" 的意义下,我们总是可以把一个算子变成恰当支撑的.

性质 6.3 设算子 $A = a(x,\,D)$ 的象征 $a \in S^m_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. 存在一个具有 $C^\infty(\Omega \times \Omega)$ 核函数的算子 R 使得 $A + R$ 是恰当支撑的.

证明 其实这和性质 6.2 的证明一样, 因为和式 $\sum'\psi_j A\psi_k$ 就定义了一个恰当支撑的算子. □

但是, 我们应当注意到, "局部象征" 和 "恰当支撑算子" 在趋于 Ω 的边界的时候无法给出 Au 的任何控制: 如果我们要研究 u 直到边界的行为 (包括有边界条件的情形), 我们需要对算子加上一个特殊条件 (称为 "传输条件"), 以便能够将函数的正则性保持到边界 (参见习题 6.8).

I.7 流形上的算子

设 M 是一个 C^∞ 流形而 A 是一个连续线性算子, $A: C_0^\infty(M) \to C^\infty(M)$.

A 被称作一个拟微分算子, 如果它在每一个坐标卡上的像都具有形式 $a(x, D)$, 其中 a 是局部象征. 为使这样一个定义能够派上用处, 我们必须先来考察局部坐标变换的问题.

I.7.1 拟微分算子和坐标变换

性质 7.1 设 $\chi: \Omega \to \Omega'$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个开集之间的一个 (C^∞) 微分同胚. 假设对于一个象征 $a \in S^m$, 算子 $a(x,\, D)$ 的核函数在 $\Omega \times \Omega$ 中具有紧支集.

那么

i) 由 $a'(\chi(x),\, \eta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi(x)\eta} a(x,\, D)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi(x)\eta}$ (对 $y \notin \Omega', a' = 0$) 定义的函数 $a'(y,\, \eta)$ 定义了一个 S^m 类的象征.

ii) $a'(x,\, D)$ 的核函数在 $\Omega' \times \Omega'$ 中具有紧支集.

iii) 对 $u \in \mathcal{S}'$, $a(x,\, D)(u \circ \chi) = (a'(x,\, D)u) \circ \chi$.

而且

$$a'(\chi(x),\, \eta) \sim \sum \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a(x^t,\, \chi'(x)\eta) D_y^\alpha (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho_x(y)\eta})|_{y=x},$$

其中 $\rho_x(y) = \chi(y) - \chi(x) - \chi'(x)(y - x)$.

我们特别注意到因为 a 的核函数在 $\Omega \times \Omega$ 中具有紧支集, (尽管 $u \circ \chi$ 不是可定义的 $\cdots$) $a(x,\, D)(u \circ \chi)$ 是可定义的.

证明 a) 我们首先注意到如果 $a \in S^m$, 那么 $a(x,\, D)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} a(x,\, \xi)$. 事实上, 如果 $\hat{u} \in C_0^\infty$, 我们有

$$a(x,\, D)\, u(\varepsilon x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} (2\pi)^{-n} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon x\zeta} a(x,\, \xi + \varepsilon\zeta) \hat{u}(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta,$$

如果

$$(2\pi)^{-n} \int \hat{u}(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta \equiv u(0) = 1;$$

那么上述等式的右端在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中收敛于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}a(x,\xi)$.

而且,当 $\varepsilon\to 0$ 时,在 $\mathcal{S}'$ 中 $u(\varepsilon x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}$.

b) 假设我们能够证明 i),那么 a' 的定义式表明,根据 a),当 $u(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\eta}$ 时 iii) 是成立的. 由于按照 Fourier 逆变换公式,指数函数的线性组合在 $\mathcal{S}'$ 中是稠密的,我们得到,在一般情况下, iii) 也是成立的.

c) 现在我们来证明 i). 如果 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 对于 a 的核函数的支集的一个邻域中的 (x,y) 满足 $\varphi(x)=\varphi(y)=1$,那么

$$a'(\chi(x),\eta)=\varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi(x)\eta}a(x,D)(\varphi(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi(x)\eta}).$$

记 $\lambda=1+|\eta|$,本章附录中的定理 3 给出了一个依赖于 λ, $a'(\chi(x),\eta)$ 及其对于 x 和 η 的各阶导数的渐近展式. 容易发现这个展开式对于参数 $\alpha=\dfrac{\eta}{\lambda}$ 是一致的. 由此可以得到 a' 是一个关于 (y,η) 的象征,并且在此意义下满足 iii) 中给出的展开式. □

现在我们可以给出一个精确的定义了.

定义 算子 $A:C_0^\infty(M)\to C^\infty(M)$ 被称作 m 阶拟微分算子,如果对于任意局部坐标系 $\kappa:V\to\tilde V\subset\mathbb{R}^n$, 相应的由 $C_0^\infty(\tilde V)$ 到 $C^\infty(\tilde V)$ 的算子 $\tilde A:u\to[A(u\circ\kappa)]\circ\kappa^{-1}$ 是 $\tilde V$ 上的 m 阶拟微分算子, 也就是说 $\forall\varphi,\ \psi\in C_0^\infty(\tilde V)$, $\varphi\tilde A\psi\in\mathrm{Op}(S^m)$ (参见性质 6.2). 记作 $A\in\Psi^m(M)$.

性质 7.1 使我们可以把这个定义应用到具体问题上去. I.6.3 节中给出的恰当支撑算子的定义可以照搬过来, 无需任何修改.

I.7.2 主象征和切丛

性质 7.1 和流形上拟微分算子的定义遗留下来一个问题: 如何定义这些算子的象征? 事实上在每一个坐标图里, 相应的算子的确在模 $S^{-\infty}$ 意义下有确定的象征, 但是它依赖于坐标图的选择. 于是这个问题就变成: 是否存在一个内蕴定义的函数, 使得它在每一个坐标图上恰好是相应的象征?

我们将看到该问题会有一个肯定的回答, 但是需要加上一个很苛刻的限制: 我们只能做到在相差一个 $m-1$ 阶象征的意义下将不同坐标图上的象征等同起来, 换句话说, 只有主象征可以内蕴地定义.

I.7.2.1 余切丛 T^*M(简单回顾)

我们知道, 所谓余切丛 T^*M (M 上的 1- 微分形式构成的丛) 的元素, 是所有形如 (m,ω) 的点构成的集合, 其中 $m\in M$ 而 ω 是 M 在 m 点的切空间 (记作 T_mM) 上的线性形式. 我们有投影 $\pi:T^*M\to M$: $\pi(m,\omega)=m$, 且每个纤维 $\pi^{-1}(m)$ 是 T_mM 的对偶空间.

a) 如果 $(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $V\subset M$ 上的局部坐标, 向量场 $(\partial_1,\cdots,\partial_n)$ 在 V 的每

一点都给出 T_mM 的一组基,形式 $(\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_n)$ 则构成了对偶空间的一组基: 如果把一个 1- 形式写成 $\omega = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathrm{d}x_i$, 我们可以得到 $\pi^{-1}(V)$ 上的局部坐标 (x, ξ), 其中 x 是 m 的坐标而 ξ 是 ω 的坐标. 在另一个坐标图 $(x'_1, \cdots, x'_n)$ 中, 如果坐标间的转换关系是 $x' = \Phi(x)$, $x = \psi(x')$, 那么 m 点的坐标自然是 $x'(m) = \Phi(x(m))$, 而形式 $\omega = \sum \xi_i \mathrm{d}x_i$ 可以写成 $\sum \xi_i \left(\sum \frac{\partial \psi_i}{\partial x'_j} \mathrm{d}x'_j\right)$, 也就是说

$$\xi'_j = \sum_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x'_j} \xi_i, \quad 或者是 \xi' = {}^t\psi'\xi.$$

换句话说,同一点 (m, ω) 在不同的坐标图 (x, ξ) 和 (x', ξ') 中的像分别是 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的点 $(x, {}^t\Phi'(x)\eta)$ 和 $(\Phi(x), \eta)$.

b) 在 T^*M 上存在一个由下式定义的所谓 "典则" 1- 形式 α:

$$\alpha_{(m,\omega)}(Z) = \omega(\pi_* Z),$$

其中 Z 是在 (m, ω) 处 T^*M 的一个切向量, 而 π_*Z 则是它在 M 上的投影.

在如 a) 中定义的局部坐标图 (x, ξ) 上,任何向量 Z 都可以写成 $Z = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum b_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ 的形式,

$$\pi_* Z = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

而且我们有

$$\alpha_{(x,\xi)}(Z) = \left(\sum \xi_i \mathrm{d}x_i\right)(\pi_* Z) = \sum \xi_i a_i = \left(\sum \xi_i \mathrm{d}x_i\right)(Z).$$

这样

$$\alpha_{(x,\xi)} = \sum \xi_i \mathrm{d}x_i,$$

这里 ξ_i 作为 α 的系数是 T^*M 上的函数.

这个 1- 形式在各种各样的问题中都起着重要作用, 尤其是通过它的微分 $\sigma = -\mathrm{d}\alpha$, 后者在局部坐标里的表达式是 $\sigma = \sum \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}\xi_i$, 这就意味着 $\sigma_{(m,\omega)}(Z, Z') = A \cdot B' - B \cdot A'$,其中

$$Z = A \cdot \frac{\partial}{\partial x} + B \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad Z' = A' \cdot \frac{\partial}{\partial x} + B' \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

由此我们知道,在 T^*M 上存在一个非退化的 2- 形式,称为 "辛形式".

c) 这个 2- 形式通过下述公式给出了从 1- 形式到 T^*M 上向量场的一个双射: 对于 1- 形式 ω 和向量场 X, Z,

$$\sigma(Z, X) = \omega(X).$$

特别地,如果存在某个 T^*M 上的函数 f 使得 $\omega = \mathrm{d}f$,相应的向量场 Z 被称作f **的 Hamilton 向量场**,记作 H_f. 对于坐标系 $(x,\ \xi)$,我们可以根据表达式

$$X = A' \cdot \frac{\partial}{\partial x} + B' \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \omega(X) = Xf = A' \cdot f'_x + B' \cdot f'_\xi,$$

$$\sigma(Z,\ X) = AB' - BA'$$

得到

$$A = f'_\xi, \quad B = -f'_x,$$

也就是说

$$Z = H_f = f'_\xi \cdot \frac{\partial}{\partial x} - f'_x \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

最后,我们定义两个 T^*M 上函数 f, g 的 **Poisson 括号**:

$$\{f,\ g\} = H_f g = f'_\xi \cdot g'_x - f'_x \cdot g'_\xi.$$

I.7.2.2 主象征

现在让我们回到性质 7.1 的情形: 如果把 a 写成 $a = a_m + S^{m-1}$ 的形式,其中 a_m 是 m 次齐次的,那么, 对 a' 也成立同样的结论,并且有

$$a'_m(\chi(x),\ \eta) = a_m(x,\ {}^t\chi'(x)\eta).$$

在此情况下我们称 a_m 是 A 的主象征.

如果在每一个坐标图中 $A \in \Psi^m(M)$ 的表达式都有一个主象征, 那么上面的公式和 I.7.2 节中的 a) 就表明这些不同的主象征其实是 T^*M 上的一个函数在不同的局部坐标中的表达式,我们称这个函数为 A 的主象征.

因为我们没有办法确定 A 的 $m-1$ 阶象征,所以对于流形上的算子,象征演算的用处就局限于下述定理.

定理 7.2.2 a) 如果 $A_i \in \Psi^{m_i}(M)$ $(i = 1, 2)$ 是恰当支撑的且具有主象征 a_i $(i = 1, 2)$, 那么 $A = A_1A_2 \in \Psi^{m_1+m_2}(M)$ 也是恰当支撑的且具有主象征 a_1a_2.

b) 交换子 $[A_1,\ A_2]$ 具有主象征 $\frac{1}{\mathrm{i}}\{a_1,\ a_2\}$.

注 我们也有一个关于共轭算子的定理 (参见习题 7.5).

只和主象征有关的概念和性质,比如椭圆性和椭圆算子的可逆性 (性质 5.4),都可以照搬到 $\Psi^m(M)$ 的情形而不用做任何改动.

I.8 附录

I.8.1 振荡积分

我们将给出一大类形如 $\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\theta)} a(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分的合理意义,其中 φ 是一个在无穷远处快速变化的函数, 而 a 假定是正则且本质上多项式增长的. 当 θ 趋于无穷时 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\theta)}$ 的快速振荡使得我们有可能把 a 的增长抵消掉, 由此来定义积分.

I.8.1.1 首先我们证明一个非常关键的引理 (所谓非驻相引理):

引理 1 设 K 是 $\mathbb{R}^N$ 的紧子集, 并设实函数 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 在 K 上满足 $|\varphi'(\theta)| \geqslant c_0 \geqslant 0$. 那么对于任何 $a \in C_0^\infty(K)$ 和任意的 $k \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\forall \lambda \geqslant 1,\ \ \lambda^k \left| \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\varphi(\theta)} a(\theta)\,\mathrm{d}\theta \right| \leqslant C_{k+1}(\varphi) C(c_0, K) \sup_{|\alpha| \leqslant k} |\partial^\alpha a|,$$

而且当 φ 在 $C^{k+1}(K)$ 的一个有界子集中的时候, $C_{k+1}(\varphi)$ 也是有界的.

证明 我们记 $L = -\mathrm{i}|\varphi'|^{-2} \sum_{j=1}^N \dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta_j} \dfrac{\partial}{\partial \theta_j}$, 那么 $L(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\varphi}) = \lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\varphi}$, 因此 $\lambda^k \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\varphi} a\,\mathrm{d}\theta = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\varphi} ({}^tL)^k(a)\,\mathrm{d}\theta$, 而且 $\mathrm{vol}(K) \sup |({}^tL)^k a|$ 给出最后一个积分的上界. □

I.8.1.2 我们现在来定义振荡积分中出现的各种振幅 $a = a(\theta)$:

定义 对 $\rho \in (-\infty, 1]$, $m \in \mathbb{R}$, 我们用 $A_\rho^m(\mathbb{R}^N)$ 来记满足下述条件的函数 $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 全体:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^N, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \quad |\partial^\alpha a(\theta)| \leqslant C_\alpha (1 + |\theta|)^{m - \rho|\alpha|}.$$

并记 $A_\rho^{+\infty} = \bigcup_m A_\rho^m$.

例 a) $\rho = 1$. 我们重新得到 I.2.1 节中所描述的 S^m 类象征和频率的依赖关系. 特别的, A_1^m 包含所有次数不超过 m 的齐次函数 (可能在 0 点附近截断), 所有次数不超过 m 的多项式 (如果 $m \in \mathbb{N}$ 的话), 等等.

b) 如果 $p = p(\theta)$ 是 $1 - \rho$ 次齐次的, 而且在原点之外是 C^∞ 函数, 那么 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p}$ (可能在 0 点附近截断) 定义了 A_ρ^0 的一个元素. 特别的: $\forall \omega \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\theta}$ 定义了 A_0^0 的一个元素, 如果 q 是一个二次型那么 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}q} \in A_{-1}^0$, 等等.

和 S^m 的情形一样, 我们用半范数族定义 A_ρ^m ($\rho \leqslant 1$) 一个自然的完备空间结构:

$$N_{\rho,k}^m(a) = \sup_{|\alpha| \leqslant k,\, \theta \in \mathbb{R}^N} (1 + |\theta|)^{-m + \rho|\alpha|} |\partial^\alpha a(\theta)|.$$

引理 2.2.1 的证明可以稍作修改用来说明, 对于任意的 $\rho \leqslant 1, \mathcal{S}$ (也就是 $\bigcap_{m \in \mathbb{R}} A_\rho^m$)

对于 $A_\rho^{m+\varepsilon}(\forall\varepsilon>0)$ 的拓扑来说在 A_ρ^m 中是稠密的.

I.8.1.3 现在来给出我们将要研究的积分的精确定义.

设 $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^N\setminus\{0\})$ 是一个次数 $\mu>0$ 的实值齐次函数. 我们考虑积分

$$I_\varphi(a)=\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\theta)}a(\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

它对于所有满足 $m<-N$ 的函数 $a\in A_\rho^m$ 是可定义的. 我们的目的是将线性形式 I_φ 延拓到其他的 a 上. 为此, 我们对 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 加上一个振荡条件:

$$\text{对}\theta\neq 0,\quad d_\theta\varphi\neq 0.$$

定理 1 在上述假设条件下, 如果我们还有 $\mu>1-\rho$, 那么对于任意的 $m\in\mathbb{R}$, I_φ 可以连续延拓到 A_ρ^m 上. 考虑到 $\mathcal{S}$ 在这些空间中的稠密性,这个延拓是唯一的.

证明 我们引进空间 $\mathbb{R}^N$ 的一个二进单位分解 (这一手段在 II.A.1.1 中也会用到). 我们找两个满足

$$\operatorname{supp}\chi_0\subset\{|\theta|\leqslant 1\},\quad \operatorname{supp}\chi\subset\{1/2\leqslant|\theta|\leqslant 2\}$$

的函数 $\chi_0\in C_0^\infty$, $\chi\in C_0^\infty$ 使得

$$1=\chi_0(\theta)+\sum_{p=0}^{\infty}\chi(2^{-p}\theta),$$

那么

$$I_\varphi(a)=\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\chi_0 a+\sum_{p=0}^{\infty}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\theta)}\chi(2^{-p}\theta)a(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

我们要证明对于任意的 $a\in A_\rho^m$ 这个级数都是收敛的, 并且用 a 在 A_ρ^m 中的半范数估计和式的大小. 在做一次变量代换 $\theta\mapsto 2^p\theta$ 以后, 各个级数项可以用引理 1 进行估计: 对于任意 $k\in\mathbb{N}$,

$$\left|2^{Np}\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}2^{p\mu}\varphi(\theta)}\chi(\theta)a(2^p\theta)\,\mathrm{d}\theta\right|\leqslant C_{k+1}2^{Np-p\mu k}\sup_{\substack{|\alpha|\leqslant k,\\ 1/2\leqslant|\theta|\leqslant 2}}2^{p|\alpha|}|\partial^\alpha a(2^p\theta)|.$$

我们可以对不等式右边给出下述控制:

$$C_{k+1}2^{p(N-\mu k+m+(1-\rho)k)}N_{\rho,k}^m(a).$$

这样我们只要选择 k 满足:

$$N+m-k(\mu-1+\rho)<0,$$

就可以保证级数项的几何收敛性并得到相应的估计了. □

注 a) 条件 $\mu > 1-\rho$ 正好保证了振荡项 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 不在 a 所处的振幅空间 $A_\rho^{+\infty}$ 中 (参见前述例 b)).

b) 为了计算 $I_\varphi(a)$, 我们可以选择一个满足 $\chi(0)=1$ 的函数 $\chi \in \mathcal{S}$. 这样对于任意的 $a \in A_\rho^m$ 和任意的 $\delta > 0$, 当 ε 趋于 0 时, 函数族 $\chi(\varepsilon\theta)a(\theta)$ 在 $A_\rho^{m+\delta}$ 中收敛于 $a(\theta)$. (这就是对于空间 A_ρ^m 的引理 2.2.1). 由此得到

$$I_\varphi(a) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\theta)} a(\theta)\chi(\varepsilon\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

这种形式的公式使我们可以把绝对收敛积分的那些运算规则 (Fubini 定理,分部积分,齐次变量代换,在积分号下求导) 推广到振荡积分 $I_\varphi(a)$ 的情形.

I.8.2 象征演算定理的证明

现在我们来证明定理 3.2.3.

定理 2 如果 $a = a(x,\xi) \in S^m$, 那么

$$a^*(x,\xi) = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\eta}\overline{a}(x-y,\xi-\eta)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta/(2\pi)^n$$

是 S^m 的元素,并且满足渐近展式

$$a^*(x,\xi) \sim \sum_{\alpha \geqslant 0} \frac{1}{\alpha!}\,\partial_\xi^\alpha\, D_x^\alpha\,\overline{a}(x,\xi).$$

证明 我们记 $\varphi(y,\eta) = -y\eta$; φ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 上一个非退化的二次型, 因此对于 $\mu = 2$ 满足定理 1 的条件.

同时,对于固定的 (x,ξ), 函数 $\overline{a}(x-y,\xi-\eta)$ 属于 $A_0^{m_+}(\mathbb{R}^{2n})$ (满足 $m_+ = \max(m,0)$), 理由是

$$(1+|\eta|)^m \leqslant (1+|y|+|\eta|)^{m_+}.$$

于是根据定理 1 我们可以定义振荡积分

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\eta}\overline{a}(x-y,\xi-\eta)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta;$$

而由连续性,这只能是 $a^*(x,\xi)$ (在 I.3 节中它是作为一个 Fourier 变换定义的). 这样定理 1 马上给出下述估计: 对某个适当的 k,

$$|a^*(x,\xi)| \leqslant CN_{0,k}^{m_+}(\overline{a}(x-\cdot,\xi-\cdot)).$$

我们将看到, 当 $m \geqslant 0$ 时, 这一估计能够推出我们所需要的结果. 而当 $m < 0$ 时, 我们将使用一个更为粗糙, 但用到更多关于 a 的信息的估计. 对于 $\mu \geqslant m_+$, 如果把 $\overline{a}(x-\cdot,\xi-\cdot)$ 看作一个 "更大的空间" A_0^μ 的元素, 我们可以得到

$$|a^*(x,\xi)| \leqslant CN_{0,j}^{\mu}(\overline{a}(x-\cdot,\xi-\cdot)),$$

其中 j 依赖于 μ.

现在对于 $\mu \geqslant 0$ 我们有

$$(1+|y|+|\eta|)^{-\mu} \sup_{|\alpha|+|\beta|\leqslant k} |\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta \overline{a}(x-y,\,\xi-\eta)| \leqslant C(1+|\eta|)^{-\mu}(1+|\xi-\eta|)^m,$$

而 μ 的选取可以根据下述初等引理得到:

引理 2 (Peetre 不等式) 对所有的 $\xi,\,\eta \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{R}$,

$$(1+|\xi-\eta|)^m \leqslant (1+|\eta|)^{|m|}(1+|\xi|)^m.$$

证明 当 $m \geqslant 0$ 时, 因为 $1+|\xi-\eta| \leqslant 1+|\xi|+|\eta| \leqslant (1+|\xi|)(1+|\eta|)$, 结论是平凡的. 而 $m<0$ 的情形可以通过把 ξ 换成 $\xi-\eta$, m 换成 $-m$ 得到. □

这样我们选择 $\mu = |m|$, 可以得到

$$|a^*(x,\,\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^m.$$

在这一证明中把 a 换成 $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\,\xi)$, 我们就证明了 $a^* \in S^m$.

为了得到渐近展式, 我们对于函数 $g(t) = \overline{a}(x+ty,\,\xi+t\eta)$ 应用带积分余项的 Taylor 展开. 注意到

$$g^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=k} \frac{k!}{\alpha!\beta!} y^\alpha \eta^\beta \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \overline{a}(x+ty,\,\xi+t\eta),$$

我们有

$$a^*(x,\,\xi) = (2\pi)^{-n} \sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant 2k+1} \frac{(-1)^{|\alpha|+|\beta|}}{\alpha!\beta!} \times \left(\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\eta} y^\alpha \eta^\beta \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta\right) \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \overline{a}(x,\,\xi) + R_k(x,\,\xi),$$

其中

$$R_k(x,\,\xi) = (2\pi)^{-n} \int_0^1 (1-t)^{2k+1}\,\mathrm{d}t \times \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\eta} \sum_{|\alpha|+|\beta|=2k+2} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \times \frac{2k+2}{\alpha!\beta!} \partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta \overline{a}(x-ty,\,\xi-t\eta) y^\alpha \eta^\beta \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta.$$

我们先来计算这一展式中主部的每一项:

引理 3　$\forall\alpha\in\mathbb{N}^n,\ \forall\beta\in\mathbb{N}^n$,我们有

$$(2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\eta}y^\alpha\eta^\beta\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta=(-\mathrm{i})^{|\alpha|}\alpha!\delta_{\alpha\beta},$$

其中若 $\alpha=\beta$,则 $\delta_{\alpha\beta}=1$; 若 $\alpha\neq\beta$,则 $\delta_{\alpha\beta}=0$.

证明　不失一般性我们假设 $|\alpha|\geqslant|\beta|$. 注意到 $y^\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\eta}=(-D_\eta)^\alpha(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\eta})$,我们做分部积分:

$$(2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\eta}y^\alpha\eta^\beta\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta=(2\pi)^{-n}\int D_\eta^\alpha(\eta^\beta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\eta}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta.$$

如果 $\alpha\neq\beta$, 那么存在 j 使得 $\alpha_j>\beta_j$. 我们得到

$$D_\eta^\alpha(\eta^\beta)=0,\ \text{若}\alpha\neq\beta;$$
$$D_\eta^\alpha(\eta^\alpha)=(-\mathrm{i})^{|\alpha|}\alpha!.$$

接下来要对一个满足 $\chi(0)=1$ 的函数 $\chi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 计算:

$$(2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\eta}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta=\lim_{\varepsilon\to0^+}(2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\eta}\chi(\varepsilon y)\chi(\varepsilon\eta)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}\eta.$$

而这个积分实际上就是

$$(2\pi)^{-n}\int\chi(\varepsilon\eta)\hat{\chi}(\eta/\varepsilon)\,\mathrm{d}\eta/\varepsilon^n=(2\pi)^{-n}\int\chi(\varepsilon^2\eta)\hat{\chi}(\eta)\,\mathrm{d}\eta,$$

收敛到 $(2\pi)^{-n}\int\hat{\chi}(\eta)\,\mathrm{d}\eta=\chi(0)=1$.

我们得到

$$a^*(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha\overline{a}(x,\xi)+R_k(x,\xi).$$

我们有 $\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha\overline{a}\in S^{m-|\alpha|}$,现在来证明 $R_k\in S^{m-k-1}$. 为此, 我们注意到, 如同前面先对 η 再对 y 做分部积分, $R_k(x,\xi)$ 是一些形如

$$\int_0^1(1-t)^{2k+1}t^j\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\eta}\partial_y^\gamma\partial_\eta^\gamma\overline{a}(x-ty,\xi-t\eta)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}t$$

的项的线性组合,其中 $|\gamma|\geqslant k+1$. 但 $(y,\eta)\mapsto\partial_y^\gamma\partial_\eta^\gamma\overline{a}(x-ty,\xi-t\eta)$ 是

$$A_0^{m-|\gamma|}(\mathbb{R}^{2n})\subset A_0^{|m-|\gamma||}(\mathbb{R}^{2n})$$

中的函数, 这样相应的振荡积分就具有上界:

$$\begin{aligned}&C\sup_{y,\eta}(1+|y|+|\eta|)^{-|m-|\gamma||}(1+|\xi-t\eta|)^{m-|\gamma|}\\&\qquad\leqslant C\sup_{\eta}(1+t|\eta|)^{-|m-|\gamma||}(1+|\xi-t\eta|)^{m-|\gamma|}\\&\qquad\leqslant C(1+|\xi|)^{m-|\gamma|}\leqslant C(1+|\xi|)^{m-k-1}.\end{aligned}$$

所以 $|R_k(x,\,\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^{m-k-1}$, 而且把 a 换成 $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a$ 我们还可以得到 $\partial_x^\alpha \partial_\eta^\beta R_k(x,\,\xi)$ 的上界. 这样就完成了证明. □

注 在习题 4.12.c) 中,我们给出一个略有不同的证明, 可以推广到更大的象征类.

定理 4.1 可以用一模一样的办法证明,这时候需要研究的量是

$$a\#b(x,\,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\eta} a(x,\,\xi-\eta)b(x-y,\,\xi)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta,$$

这也是一个振荡积分,其振幅在 $A_0^{+\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ 中. 我们将细节留给读者 (参见习题 4.11).

I.8.3 拟微分算子在振荡函数上的作用

用同样的方法, 我们可以得到一个非常有用的结论, 这是证明关于拟微分算子变量代换的性质 7.1 的关键.

定理 3 设 $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是一个实值函数, 且 $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}\psi(x) \neq 0$, 并设 $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. 那么对于所有的 $\lambda \geqslant 1$,

$$a(x,\,D)(u\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\psi})(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\psi(x)} I(x,\,\lambda), \tag{3.1}$$

其中对于 $\lambda \to +\infty$, $I(x,\,\lambda)$ 具有下述关于 x 局部一致的渐近展式,

$$I(x,\,\lambda) \sim \sum_{\alpha\geqslant 0} \frac{1}{\alpha!}\,\partial_y^\alpha(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda r_x(y)}u(y))\Big|_{y=x} D_\xi^\alpha a(x,\,\lambda,\,\mathrm{d}\psi(x)). \tag{3.2}$$

在公式 (3.2) 中, 我们记 $r_x(y) = \psi(y) - \psi(x) - \mathrm{d}\psi(x)(y-x)$, 且 α 阶项可以由 $\lambda^{m-|\alpha|/2}$ 控制.

证明 根据定义,在振荡积分意义下,

$$I(x,\,\lambda) = (2\pi)^{-n}\iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi} a(x,\,\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(\psi(y)-\psi(x))}u(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi.$$

做变量代换 $y = x+z$, $\xi = \eta + \lambda\,\mathrm{d}\psi(x)$, 我们得到 (利用前面定义的记号):

$$\begin{aligned} I(x,\,\lambda) = (2\pi)^{-n}\iint\ & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\cdot\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda r_x(x+z)}u(x+z) \\ & \times a(x,\,\eta+\lambda\,\mathrm{d}\psi(x))\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\eta. \end{aligned} \tag{3.3}$$

a) 如果记 $\Phi(x,\,\eta,\,\lambda) = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\cdot\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda r_x(x+z)}u(x+z)\,\mathrm{d}z$, 那么

$$I(x,\,\lambda) = (2\pi)^{-n}\int a(x,\,\eta+\lambda\,\mathrm{d}\psi(x))\Phi(x,\,\eta,\,\lambda)\,\mathrm{d}\eta.$$

现在我们来证明对于充分大的 C, 在 $\dfrac{\lambda}{C} \leqslant |\eta+\lambda\,\mathrm{d}\psi(x)| \leqslant C\lambda$ 之外

$$\forall k,\quad |\Phi(x,\,\eta,\,\lambda)| \leqslant C_k(1+|\eta|+\lambda)^{-k}. \tag{3.4}$$

事实上,我们记:

$$-z\cdot\eta+\lambda r_x(x+z)=\lambda\left[r_z(x+z)-z\cdot\frac{\eta}{\lambda}\right]=\lambda f(z),$$

这样 $f'(z)=\mathrm{d}\psi(x+z)-\mathrm{d}\psi(x)-\eta/\lambda$.

选择一个对于 u 的支集中的点 y 都有 $|\mathrm{d}\psi(y)|\geqslant 2/C$ 的常数 C,如果 $|\eta+\lambda\,\mathrm{d}\psi(x)|<\lambda/C$,那么 $|f'(z)|\geqslant 1/C$.

同样,选择一个对于 u 的支集中的点 y 都有 $|\mathrm{d}\psi(y)|\leqslant C/2$ 的常数 C,如果 $|\eta+\lambda\,\mathrm{d}\psi(x)|>\lambda C$, 那么 $|f'(z)|\geqslant C/2$.

这样用来定义 Φ 的积分具有一致非驻相相位 f,这样引理 1 就给出了估计 (3.4).

现在我们有:

$$I(x,\,\lambda)=I_1(x,\,\lambda)+I_2(x,\,\lambda),$$

其中

$$I_2(x,\,\lambda)=(2\pi)^{-n}\iint \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\cdot\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda r_x(x+z)}u(x+z)\times\chi\left(\frac{\eta}{\lambda}+\mathrm{d}\psi(x)\right)a(x,\,\eta+\lambda\,\mathrm{d}\psi(x))\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\eta,\tag{3.5}$$

其中 $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足对于 $1/C\leqslant|\zeta|\leqslant C,\chi(\zeta)=1$, 对于 $|\zeta|\leqslant 1/2\,C,\chi(\zeta)=0$.

基于对 Φ 的估计, I_1 在 $\lambda\to+\infty$ 时是速降的.

b) 为了处理 I_2, 我们记:

$$b(x,\,z,\,\eta,\,\lambda)=u(x+z)a(x,\,\eta+\lambda\,\mathrm{d}\psi(x))\chi\left(\frac{\eta}{\lambda}+\mathrm{d}\psi(x)\right).$$

那么 b 满足下述估计:

$$\forall\alpha,\,\forall\beta,\quad |\partial_z^\alpha\partial_\eta^\beta b(x,\,z,\,\eta,\,\lambda)|\leqslant C_{\alpha\beta}\lambda^{m-|\beta|},$$

且具有对 η, λ 一致, 对 x 局部一致的紧 z 支集. □

于是这个定理就是下述引理的推论:

引理 4 假设 $r\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\mathrm{d}r(0)=0$, 而函数 $b\in C^\infty(\mathbb{R}_z^n\times\mathbb{R}_\eta^n)$ 依赖于一个参数 $\lambda\in[1,\,+\infty)$ 满足对于一个适当的 m,

$$\forall\alpha,\,\forall\beta,\quad |\partial_z^\alpha\partial_\eta^\beta b(z,\,\eta,\,\lambda)|\leqslant C_{\alpha\beta}\lambda^{m-|\beta|}.$$

我们还假设 b 相对于 η, λ 具有一致的紧 z 支集.

这样当 $\lambda\to+\infty$ 时积分

$$J(\lambda)=(2\pi)^{-n}\iint \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\cdot\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda r(z)}b(z,\,\eta,\,\lambda)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\eta$$

具有下述渐近展式

$$J(\lambda) \sim \sum_{\alpha \geqslant 0} \frac{1}{\alpha!} \partial_z^\alpha (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda r(z)} D_\eta^\alpha b(z, 0, \lambda))\Big|_{z=0},$$

其中 α 阶项可以为 $\lambda^{m-|\alpha|/2}$ 所控制.

证明 就像在定理 2 的证明中一样, 我们用在 $z=\eta=0$ 处振幅的 Taylor 展开. 根据引理 3, 我们立即得到

$$J(\lambda) = \sum_{|\alpha|<k} \frac{1}{\alpha!} \partial_z^\alpha (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda r} D_\eta^\alpha b(z, 0, \lambda))\big|_{z=0} + R_k(\lambda),$$

$$R_k(\lambda) = (2\pi)^{-n} \int_0^1 (1-t)^{2k-1} \sum_{|\alpha|+|\beta|=2k} 2k \iint \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\cdot\eta} \frac{z^\alpha \eta^\beta}{\alpha!\beta!} \times \partial_z^\alpha \partial_\eta^\beta (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda r} b)(tz, t\eta, \lambda)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}t.$$

现在我们来研究 "主" 项的增长. 在 $\partial_z^\alpha(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda r} D_\eta^\alpha b(z, 0, \lambda))$ 的展开式中, 每一次对指数项关于 z 求导都给出在 $z=0$ 取零值的因子 $\mathrm{i}\lambda\partial_z r$, 这样 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda r}$ 对于和式的贡献就是一些形如[①]

$$\lambda^q \partial_z^{\alpha_1} r \cdots \partial_z^{\alpha_q} r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda r}$$

的项的线性组合, 其中 $\sum_{i=1}^{q} |\alpha_i| \leqslant |\alpha|$ 而 $|\alpha_i| \geqslant 2$, 所以 $q \leqslant \dfrac{|\alpha|}{2}$.

现在把对 b 的估计也考虑进去, 我们得到

$$|\partial_z^\alpha (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda r} D_\eta^\alpha b(z, 0, \lambda))|_{z=0} \leqslant C_\alpha \lambda^{m-|\alpha|/2}.$$

我们将利用 $\mathrm{d}r(0)=0$ 来给出余项 $R_k(\lambda)$ 的估计.

和定理 2 中一样, 我们先对 η 和 z 做分部积分, 然后就只要对一些形如

$$\iint \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\cdot\eta} \partial_z^\gamma (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda r} \partial_\eta^\gamma b)(tz, t\eta, \lambda)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\eta \tag{3.6}$$

的量给出对于 $t \in [0, 1]$ 一致的估计就可以了, 这里 $|\gamma| \geqslant k$.

对固定的 λ, (3.6) 是一个具有相位 $-z\cdot\eta$, 且振幅在 A_0^0 中的振荡积分. 但是, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda r}$ 对 z 的各阶导数随着 λ 增长得非常快, 这样就把 b 对于 η 的各阶导数的递降性质抵消掉了, 并导致振幅在 A_0^0 中的半范数不具有我们需要的递降性质.

因此我们需要对这个积分作进一步变换: 对 z 展开. 振幅于是就是一些形如

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda r} \lambda^q\, \partial_z^{\nu_1} r \cdots \partial_z^{\nu_q} r\, \partial_z^\mu \partial_\eta^\gamma b(tz, t\eta, \lambda)$$

的项的线性组合, 其中 $\sum_{i=1}^{q} |\nu_i| + |\mu| = |\gamma|,\ |\nu_i| \geqslant 1$.

① 译校者注: 记住我们始终在考虑 $z=0$ 的情形.

如果 $|\nu_i|=1$, 那么存在某个函数 $\psi_{\nu_i}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 使得 $(\partial_z^{\nu_i}r)(tz)=t\psi_{\nu_i}(tz)\cdot z$. 对于 η 做分部积分, 问题就归结为对某个 $\Phi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 估计形如

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda r}\lambda^q\Phi(tz)\partial_z^\mu\partial_\eta^{\gamma+\delta}b(tz,\,t\eta,\,\lambda)$$

的振幅,其中 $|\delta|=\#\{i,\,|\nu_i|=1\}$, 这样

$$|\gamma|\geqslant\sum_{i=1}^q|\nu_i|\geqslant 2q-|\delta|,$$

即

$$q-\frac{|\delta|}{2}\leqslant\frac{|\gamma|}{2}. \tag{3.7}$$

现在我们利用定理 1,对于一个 (选定的) 振幅的半范数来估计这个振荡积分, 考虑到对于 b 的估计,我们得到

$$|R_k(\lambda)|\leqslant C_k\lambda^{M+q+m-|\gamma|-|\delta|},$$

把 (3.7) 代入,我们有

$$|R_k(\lambda)|\leqslant C_k\lambda^{M+m-|\gamma|/2}\leqslant C_k\lambda^{M+m-k/2},$$

其中 M 是一个与 k 无关的整数. 证毕. □

注 在传统的叙述方式中,渐近展式 (3.2) 是从表达式 (3.5) 出发利用更一般的 "驻相" 定理 (参见习题 7.1) 得到的. 这一定理是用来对于 $u\in C_0^\infty$ 而 f 只有非退化临界点的情况研究形如 $\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda f(x)}u(x)\,\mathrm{d}x$ 的积分的. (参见 [H1], 7.7 节). 而本节中特别简单的相位结构促使我们给出一个直接证明.

第 I 章补注

本章的基本内容,有时候甚至连具体的表述方式,都来自 Hörmander 的巨著*The Analysis of Linear Partial Differential Operators*中的相应章节 (Vol. III, 18.1 节). 不过我们努力使文字尽可能地初等, 自给自足,包含那些在我们看来属于这一理论 "最基本" 的内容. 我们认为这样的一种陈述不仅对学生是有用的,对于更加 "应用" 的数学工作者或者其他领域的研究人员, 他们也可以把本章视为一种 "速成课程".

当然,许多内容只是很粗略地被涉及: 在 Hörmander 的著作 [H5] (第 III 卷, 18.5 节, "Weyl calculus") 中引进了具有合理的象征演算的更广的特征类; 在 Coifman 和 Meyer 的著作*Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels* [CM] 中我们可以找到 L^2 上 "奇异" 算子作用的更为细致深入的讨论;Sjöstrand 的*Singularités analytiques microlocales* [Sj] 研究了复数域上具有解析象征的算子; 最后,关于各种各样的 "Gårding 型" 不等式的讨论可以在 Hörmander [H5] 中找到 (18.6.7, "Sharp Gårding"; 18.6.8, "Fefferman–Phong"; 22.3.3 , "Melin").

下一章中除了这一理论的各种应用外还有本章内容的其他一些补充.

第 I 章习题

1.1. 设 $p=p(\xi)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上一个次数 $m\geqslant 1$ 的复值多项式函数, 并且按照下述意义是椭圆的: 若 p_m 是 p 的最高阶齐次部分,对于所有的 $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 我们有 $p_m(\xi)\neq 0$.

a) 证明我们可以由

$$\hat{E}(\xi)=\frac{1-\chi(\xi)}{p(\xi)}$$

来定义 $E\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,其中 $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是一个待定函数;验证 $p(D)E=\delta+\omega,\omega\in\mathcal{S}$.

b) 当 $|\alpha|$ 充分大时, 验证 $x^\alpha E\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$;并且对于所有的 β, 我们有 $D^\beta(x^{\alpha+\beta}E)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 由此证明在 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 上 E 是 C^∞ 的.

c) 我们设 $m\geqslant n+1$. 证明对于所有满足 $|\beta|\leqslant m-n-1$ 的 β, 我们有 $D^\beta E\in L^1(\mathbb{R}^n)$. 由此推出, 如果 $u\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足 $p(D)u\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$,那么对于所有满足 $|\alpha|\leqslant m-n-1$ 的 α, 我们有 $\partial^\alpha u\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

注 上面的估计明显不是最优的. 实际上我们可以对于 $|\alpha|\leqslant m-1$ 证明 $\partial^\alpha u\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (或者对于 $|\alpha|\leqslant m$ 我们 “几乎可以” 证明这一点).

1.2. 设 $u\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足对于所有的 $j\in\{1,\cdots,n\}$ 和所有的 $k,\partial_j^k u\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 证明对于所有的 $\alpha\in\mathbb{N}^n$,我们有 $\partial^\alpha u\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. (提示: 考虑算子 $P_k=\sum\limits_{j=1}^n\partial_j^{2k}$).

2.1. a) 设 $a=a(x,\xi)\in S^m(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. 我们记 $n=n_1+n_2,\xi=(\xi_1,\xi_2)$,其中 $n_2\geqslant 1,\xi_i\in\mathbb{R}^{n_i}$. 我们假设 a 和 ξ_2 无关. 证明 a 是 m 阶微分算子.

b) 设 $a=a(x,\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 且对于 a) 中的相应记号满足

$$\forall\alpha,\forall\beta,\quad\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right|\leqslant C_{\alpha\beta}(1+|\xi_1|)^{m-|\beta|}.$$

设对于某个 $C>0$ 有一个支集在 $\{|\xi_2|\leqslant C|\xi_1|\}$ 中的函数 $\chi\in S^0(\mathbb{R}^n_\xi)$. 证明 $a(x,\xi)\chi(\xi)\in S^m$(我们将验证存在这样一个 χ).

2.2. 设 $a=a(x,\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 及其各阶导数在 $\mathbb{R}^n\times\{|\xi|\leqslant 1\}$ 上都是有界的, $\chi\in C^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)$ 的支集在 $\{1/2\leqslant|\xi|\leqslant 2\}$ 中,且在单位球面 S^{n-1} 上非零.

对于 $\lambda \geqslant 1$,我们记 $a_\lambda(x,\,\xi) = \chi(\xi)a(x,\,\lambda\xi)$. 证明下述两条件是等价的:

i) $a \in S^m$.

ii) $\forall k \in \mathbb{N},\ \|a_\lambda\|_{C^k(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)} \leqslant C_k\lambda^m$.

2.3. 设 $a = a(x,\,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ 满足:存在 $m \in \mathbb{R}$,使得

i) $\forall\alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\partial_x^\alpha a(x,\,\xi)| \leqslant C_\alpha(1+|\xi|)^m$.

ii) $\forall\beta \in \mathbb{N}^n,\ |\partial_\xi^\beta a(x,\,\xi)| \leqslant C_\beta(1+|\xi|)^{m-|\beta|}$.

证明 $a \in S^m$. (利用习题 2.2 和 1.2)

2.4. a) 设 $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$. 我们设 f 和 $\partial^\alpha f$ $(|\alpha| = k)$ 都是有界的. 设 $x \in \mathbb{R}^n, P_x(h) = \displaystyle\sum_{1\leqslant|\beta|\leqslant k-1} \frac{\partial^\beta f(x)}{\beta!}h^\beta$. 证明函数族 $(P_x)_{x\in\mathbb{R}^n}$ 是有界的,并由此推出

$$\forall\beta,\ 1 \leqslant \beta \leqslant k-1,\ \|\partial^\beta f\|_{L^\infty} \leqslant C\left(\|f\|_{L^\infty} + \sum_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha f\|_{L^\infty}\right).$$

通过 (对于适当的 λ) 把 x 换成 λx,证明

$$\|\partial^\beta f\|_{L^\infty} \leqslant C\|f\|_{L^\infty}^{1-|\beta|/k}\left(\sum_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha f\|_{L^\infty}\right)^{|\beta|/k}.$$

b) 设 $p = p(x,\,\xi) \in S^m$ 对于一个适当的 $\mu < m$ 满足 $|p(x,\,\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^\mu$. 证明 $\forall\varepsilon > 0, p \in S^{\mu+\varepsilon}$(我们可以利用习题 2.2).

c) 函数 $\xi \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\log|\xi|)^2}$ 是哪一个非常自然的问题的解?

2.5. 设 $C_0 > 0, \Omega = \{\zeta \in \mathbb{C}^n,\ |\mathrm{Re}\,\zeta| > C_0|\mathrm{Im}\,\zeta|\}, a = a(\zeta)$ 是 Ω 上的一个满足

$$\forall\zeta \in \Omega\,,\ |\zeta| \geqslant 1\,,\ |a(\zeta)| \leqslant C(1+|\zeta|)^m$$

的全纯函数. 证明 $(1-\chi(\xi))a(\xi) \in S^m$ ($\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是一个在 $\xi = 0$ 附近取值为 1 的函数).

2.6. 在本题中我们将把 I.2.3 节中的引理推广到 $\mathbb{C}$ 中一个扇形区域内的全纯函数上. 设 $\Omega = \{z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Im}\,z| < C_0\,\mathrm{Re}\,z\}$,其中 $C_0 > 0$ 是给定常数.

a) 对于 $\alpha > 0$,我们记 $f_\alpha(z) = \mathrm{e}^{-\alpha/z}$. 对于所有的 $k \in \mathbb{N}, z \to 0, z \in \Omega$ 验证 $f_\alpha(z)/z^k \to 0$. 并且在 Ω 的所有紧子集上当 $\alpha \to 0^+$ 时 $f_\alpha(z)$ 一致收敛到 1.

b) 设 $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是一个复数列. 证明存在正实数列 $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 使得级数 $\displaystyle\sum_{j=0}^\infty b_j\frac{z^j}{j!}(1-f_{\alpha_j}(z))$ 在 Ω 中的任意紧子集上一致收敛. 我们可以得到什么结论?

2.7. 设 m_j 是一个趋于 $-\infty$ 的递降实数列,并设 $a_j \in S^{m_j}$. 我们假设存在 $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ 满足:

i) $\exists \mu \in \mathbb{R},\ a \in S^\mu$.

ii) 存在趋于 $-\infty$ 的递降实数列 $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$,使得

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|a(x,\xi) - \sum_{j<n} a_j(x,\xi)\right| \leqslant C_n(1+|\xi|)^{\mu_n}.$$

证明 $a \sim \sum a_j$.(我们可以利用习题 2.4)

2.8. 对于 $\tau \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}$,我们记 $p(\xi,\tau) = \dfrac{1}{1+\xi^2+\mathrm{i}\tau}$.

a) 建立 $\partial_\xi^{k+2}p, \partial_\xi^{k+1}p$ 和 $\partial_\xi^k p$ 之间的一个递归关系. 由此推出 p 不属于任何一个 $S^m(\mathbb{R}^2_{\xi,\tau})$. (我们可以用反证法,并对于 $\tau \to +\infty$ 研究 $\partial_\xi^k p(\tau^{1/2},\tau)$ 的递降性)

b) 证明我们有下述估计

$$\forall j,\ \forall k,\quad |\partial_\xi^k \partial_\tau^j p(\xi,\tau)| \leqslant C_{j,k}(1+|\xi|+|\tau|)^{-1-k/2-j}.$$

2.9. 对于 $\rho \in [0,1], \delta \in [0,1]$,我们用 $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ 来表示 $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ 中所有满足

$$\forall \alpha,\ \forall \beta,\quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}$$

的函数 $a = a(x,\xi)$ 构成的线性空间.

a) 设 $b \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ 满足 $|b| \geqslant C(1+|\xi|)^\mu\ (C>0)$ 并且

$$\exists \rho,\ \delta,\ \forall \alpha,\ \forall \beta,\ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b| \leqslant C_{\alpha\beta}|b(x,\xi)|(1+|\xi|)^{-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}.$$

证明 $1/b \in S^{-\mu}_{\rho,\delta}$.

b) 象征 $\varphi(x)(1+|x|^{2\mu}|\xi|^{2\nu})^{-1}$ 在哪一个象征类 $S^m_{\rho,\delta}$ 中? 这里 μ,ν 是非负整数,$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

3.1. 在本习题中我们将建立拟微分算子的核函数 (参见 I.3.2.2 节) 所满足的,与算子的阶无关的一类条件.

a) 设 $a(x,\xi) \in \bigcup_{m\in\mathbb{R}} S^m (\equiv S^{+\infty})$. 我们考察由公式 (3.2.2) 给出的 $a(x,D)$ 的核函数 K. 证明存在整数 N 满足: $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \beta \in \mathbb{N}^n$,

$$|\beta| \geqslant N,\ (\partial_x+\partial_y)^\alpha (x-y)^\beta K(x,y) \in C^{|\beta|-N}(\mathbb{R}^{2n}) \qquad (*)$$

(也就是说函数本身和直到 $|\beta|-N$ 阶导数都是在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上连续有界的).

b) 反过来,设 $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ 对于某个 N 满足 $(*)$. 我们用 $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ 来表示由 (3.2.2′) 定义的分布. 证明存在整数 M 满足

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \forall \beta \in \mathbb{N}^n,\ |\beta| \geqslant M,\ \forall \gamma \in \mathbb{N}^n,\ |\gamma| \leqslant |\beta| - M,\ \xi^\gamma \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a \in L^\infty.$$

由此证明 $a \in S^{+\infty}$.

注 如果我们试图用 a) 和 b) 中出现的 N 来决定 a 的阶的话,我们会发现有一个相当大 (数量级为 n) 的误差. 这是因为对于 Fourier 分析来说, 空间 L^∞ 的性质很差.

3.2. 习题 3.1 表明,一个拟微分算子的核函数在对角线 $\{x = y\}$ 以外是 C^∞ 的.

设 $a \in S^0, K$ 是 $a(x, D)$ 的核函数. 我们在这里研究当 (x, y) 趋向于对角线 (也就是说 $z = x - y$ 趋向于 0) 的时候 $K(x, y)$ 的性态.

我们记 $H(x, z) = K(x, x - z)$. 对于适当的 $\lambda \geqslant 1$,我们记 $H = H_1 + H_2$,其中:

$$H_1(x, z) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cdot\xi} a(x, \xi)\chi(\xi/\lambda)\,\mathrm{d}\xi/(2\pi)^n$$

$$H_2(x, z) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cdot\xi} a(x, \xi)(1 - \chi(\xi/\lambda))\,\mathrm{d}\xi/(2\pi)^n,$$

其中 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,且对于 $|\xi| \leqslant C$ 取值为 1.

a) 利用分部积分证明, 对于所有的 $N, N \in \mathbb{N}, N > \dfrac{n}{2}$, 存在 $C_N > 0$, 使得对所有 $\lambda \geqslant 1$, 都有

$$|H_2(x, z)| \leqslant C_N \lambda^{n-2N} |z|^{-2N}.$$

b) 验证 $|H_1(x, z)| \leqslant C\lambda^n$, 并由此得到

$$|H(x, z)| \leqslant C/|z|^n.$$

c) 证明对于所有的 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$,我们同样有 $|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K(x, y)| \leqslant \dfrac{C_{\alpha\beta}}{|x - y|^{n+|\beta|}}$.

注 核函数 K 满足上述条件 c) 的算子构成一个比 0 阶拟微分算子大得多的算子类. 特别地,它们在 L^2 上一般不是有界的 (拟微分算子的情形参见第 I.5 节),而且这个性质用分布 K 来写会很麻烦 (参见 [DJ]). 习题 5.4 中我们将看到一个简单的例子.

4.1. 证明若 $a_1(x, D)$ 和 $a_2(x, D)$ 是两个微分算子,则对于 $b(x, D) = a_1(x, D)\cdot a_2(x, D)$ 我们有 $b(x, \xi) = \sum_{\alpha \geqslant 0} \dfrac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a_1 D_x^\alpha a_2$ (注意和式是有限的).

4.2. 设 A 是一个幂零 (也就是说存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $A^k = 0$) 拟微分算子.A 具有一些什么性质? 对于 $k = 2$ 给出一个非平凡的例子.(我们可以利用习题 2.4).

4.3. 设 A 是一个幂等 (也就是说 $A^2 = A$) 拟微分算子. 假设维数 n 至少是 2. 证明 A 和 $1 - A$ 中有一个是 $-\infty$ 阶的.[1]

[1]译校者注: 考察 $n = 1$ 的情形将是非常有趣的.

4.4. 证明下述结论 (不用附录中给出的定理 4.1 的证明):

a) 映射

$$S^{m_1} \times S^{m_2} \to S^{m_1+m_2}$$
$$(a_1, a_2) \mapsto a_1 \# a_2 (= a_1(x, D) a_2(x, D) \text{的象征})$$

是连续的 (可以应用闭图像定理和性质 3.1).

b) 映射

$$S^{m_1} \times S^{m_2} \to S^{m_1+m_2-1}$$
$$(a_1, a_2) \mapsto a_1 \# a_2 - a_1 a_2$$

是连续的.

4.5. **振荡积分**

我们用下述方法来刻画附录中提到的空间 A_ρ^m(其中 $\rho > 1$):

$$\text{若 } m < 0, \text{ 则 } A_\rho^m = \mathcal{S},$$
$$\text{若 } m \geqslant 0, \text{ 则 } A_\rho^m = \mathcal{S} \oplus \mathcal{P}_{[m/\rho]},$$

其中 $\mathcal{P}_d$ 是 $\mathbb{R}^N$ 上的 d 次多项式函数空间.

4.6. a) 验证定理 1 的下述 "带系数" 版本:

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中开集, 并设有 $\varphi = \varphi(x, \theta) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ 和 $a = a(x, \theta) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ 满足:

i) φ 对于 θ 是 μ 次齐次的, 且在 $\Omega \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ 上有 $\mathrm{d}_\theta \varphi(x, \theta) \neq 0$.

ii) 存在 $\rho > 1 - \mu$ 满足, 对于 Ω 中所有紧子集 $K, x \in K, \theta \in \mathbb{R}^N$, 有

$$\forall \alpha, \forall \beta, \quad |\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta a(x, \theta)| \leqslant C_{\alpha, \beta, K} (1 + |\theta|)^{m - \rho|\beta|}.$$

那么函数 $I_\varphi(a)(x) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x, \theta)} a(x, \theta) \, \mathrm{d}\theta$ 在 Ω 上是 C^∞ 的.

b) 我们将上述结果推广到条件 i) 被减弱为

i′) φ 对于 θ 是 μ 次齐次的, 且在 $\Omega \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ 上 $\mathrm{d}_{x, \theta} \varphi(x, \theta) \neq 0$

的情形. 我们将证明, 此时仍然可以定义 $I_\varphi(a)$, 不过只能作为 Ω 上的分布, 而且映射 $I_\varphi : A_\rho^{+\infty} \to \mathcal{D}'(\Omega)$ 是连续的.

设 a 对于 $m < -N$ 满足 ii). 那么 $I_\varphi(a) \in C^0(\Omega)$, 且对于 $u \in C_0^\infty(\Omega)$ 我们有

$$\int I_\varphi(a) u \, \mathrm{d}x = \iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x, \theta)} a(x, \theta) \, u(x) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}x.$$

设 $x_0 \notin \operatorname{supp} u$,并设 U 是 $\operatorname{supp} u$ 的一个在 Ω 中相对紧的开邻域. 我们选择一个对于 (t, θ) 是 0 次齐次的函数 $\chi = \chi(t, \theta) \in C^\infty((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N) \setminus \{0\})$,满足当 $x_0 + \dfrac{t}{|\theta|} \in \operatorname{supp} u$ 时 $\chi = 1$, 而当 $x_0 + \dfrac{t}{|\theta|} \notin U$ 时 $\chi = 0$. 我们接着定义

$$\psi(t, \theta) = \varphi\left(x_0 + \frac{t}{|\theta|}, \theta\right)\chi(t, \theta),$$
$$b(t, \theta) = \frac{1}{|\theta|^N} a\left(x_0 + \frac{t}{|\theta|}, \theta\right) u\left(x_0 + \frac{t}{|\theta|}\right).$$

证明 $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+N} \setminus \{0\})$ 对于 (t, θ) 是 μ 次齐次的, 并且当 $x_0 + \dfrac{t}{|\theta|} \in \operatorname{supp} u$ 时我们有 $d_{t,\theta}\psi \neq 0$. 证明 $b \in A_\rho^{m-N}(\mathbb{R}^{n+N} \setminus \{0\})$,且

$$\int I_\varphi(a)\, u\, \mathrm{d}x = \iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} b\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\theta.$$

总结得到的结果.

c) 证明 $I_\varphi(a)$ 的奇异支集包含在集合 $\{x \in \Omega, \exists \theta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\},\ d_\theta\varphi(x, \theta) = 0\}$.

注 形如 $I_\varphi(a)$ 的分布在分析中有着非常重要的作用, 特别是 $\mu = 1,\ \rho = 1$ 的情形 (即 Fourier 分析). 在第 II 章 B.1 和 B.2 节中我们可以看到这方面的例子.

4.7. 设 α 是一个实数. 我们考虑 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f_\alpha(x) = \cos|x|^\alpha$, 记它的 Fourier 变换的奇异支集为 S_α. 证明当 $\alpha > 1$ 时 $S_\alpha = \varnothing$, 当 $\alpha = 1$ 时 $S_\alpha = \{\pm 1\}$,当 $\alpha < 1$ 时 $S_\alpha \subset \{0\}$(我们可以利用习题 1.2). 在下一个习题中我们将证明 $\alpha < 1$ 时 $S_\alpha = \{0\}$.

4.8. 设 $a = a(\theta) \in A_\rho^m, \rho > 0$. 我们假设 $\hat{a}$ 在 0 点附近是 C^∞ 的. 证明 $a \in \mathcal{S}$. (提示: 对于一个满足 $\int \hat{\varphi} = 1$ 的 $\varphi \in C_0^\infty$,对 $\theta \to \infty$ 估计 $a(\theta) - (\hat{\varphi} * a)(\theta)$)

4.9. 设 q 是 $\mathbb{R}^n$ 上非退化二次型. 习题 4.6 表明,$\mathrm{e}^{\mathrm{i}q/2}$ 的 Fourier 变换是 $\mathbb{R}^n$ 上一个 C^∞ 函数. (为什么?) 我们将具体地把这个函数算出来.

a) 我们记 q 的对偶型为 $\hat{q}$,定义如下: 如果 $q(x) = \langle Ax, x\rangle$, 那么 $\hat{q}(\xi) = \langle A^{-1}\xi, \xi\rangle$.

验证 $q(x) - 2\langle x, \xi\rangle = q(x - A^{-1}\xi) - \hat{q}(\xi)$,并由此推出

$$\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}q/2}} = (2\pi)^{n/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma\pi/4}|\det q|^{-1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{q}/2},$$

其中 σ 是 q 的符号[①], 而 $\det q$ 是 q 在一个标准正交基下的行列式.

(我们从 Gauss 积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}$ 出发做解析延拓来计算 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x^2/2}\,\mathrm{d}x$).

① 译校者注: signature, 即 q 的正特征值个数减去其负特征值个数.

b) 从 a) 推出下面的公式:$\forall\xi\in\mathbb{R}^n,\forall k\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{|\alpha|=2k}\left(\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}q(x)/2}\frac{x^\alpha}{\alpha!}\,\mathrm{d}x\right)\xi^\alpha=(2\pi)^{n/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma\pi/4}|\det q|^{-1/2}\frac{(\mathrm{i}\hat{q}(\xi))^k}{2^k k!}.$$

这对于下面我们建立驻相公式 (参见习题 7.1) 是有用的.

4.10. 我们回过头来看附录定理 1 的证明,尝试建立下述结果:

设 $\varphi=\varphi(\theta)$ 和 $a=a(\theta,\,\lambda)$ 是满足定理条件的两个函数, 其中 a 对于 $\theta\in[1,\,+\infty)$ 的变化规律如下:

$$\text{若 }\rho\geqslant 0,\ \text{则 }|\partial^\alpha a(\theta,\,\lambda)|\leqslant C_\alpha(1+|\theta|)^{m-\rho|\alpha|},$$
$$\text{若 }\rho< 0,\ \text{则 }|\partial^\alpha a(\theta,\,\lambda)|\leqslant C_\alpha(1+|\theta|+\lambda)^{m-\rho|\alpha|}.$$

设 $\chi_0\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 是一个在 $\theta=0$ 附近取值为 1 的函数, 证明对于所有的 $N\in\mathbb{N}$,

$$\left|\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\theta)}a(\theta,\,\lambda)(1-\chi_0(\theta/\lambda))\,\mathrm{d}\theta\right|\leqslant C_N\lambda^{-N}.$$

4.11. **象征演算定理**

设 $p=p(x,\,y,\,\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. 若有

$$|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\partial_\xi^\gamma p(x,\,y,\,\xi)|\leqslant C_{\alpha\beta\gamma}(1+|\xi|)^{m-|\gamma|},$$

则称 $p\in S^m(\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^n)$.

基于这样的假设,我们考虑核函数为

$$K(x,\,y)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi}p(x,\,y,\,\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

的算子 A. 证明 A 是一个 m 阶拟微分算子,且它的象征 $a(x,\,\xi)$ 满足:

$$a(x,\,\xi)\sim\sum_{\alpha\geqslant 0}\frac{1}{\alpha!}\,\partial_y^\alpha D_\xi^\alpha p(x,\,y,\,\xi)\big|_{y=x}.$$

说明从上述定理出发可以推出定理 3.2.3 和 4.1(对于后者我们可以先证明以下事实: 若 $A=a(x,\,D)$ 和 $C=c(x,\,D)$ 是两个拟微分算子,则 AC^* 具有上述形式,且此情况下 $p(x,\,y,\,\xi)=a(x,\,\xi)\overline{c(y,\,\xi)}$).

4.12.* 设 $\rho\in[0,\,1],\delta\in[0,\,1)$;我们和习题 2.9 中一样定义象征类 $S^m_{\rho,\,\delta}(\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^n)$: 若

$$|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\partial_\xi^\gamma p(x,\,y,\,\xi)|\leqslant C_{\alpha\beta\gamma}(1+|\xi|)^{m-\rho|\gamma|+\delta(|\alpha|+|\beta|)},$$

则称 $p=p(x,\,y,\,\xi)\in S^m_{\rho,\,\delta}(\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^n)$. 我们用习题 4.11 中的方式来定义算子 A.

a) 说明利用定理 1 我们同样可以解释从 p 出发得到 A 的象征 $a(x,\,\xi)$ 的积分公式.

b) 假设 $\delta = 0$. 证明 $a \in S^m_{\rho,0}$.

c) 假设 $\rho \geqslant \delta > 0$. 我们记 $\lambda = |\xi|$,并选取对于 $|y| + |\eta| \leqslant 1/2$ 取值为 1 而对于 $|y| + |\eta| \geqslant 3/4$ 取值为 0 的函数 $\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. 利用习题 4.10,证明: 对于所有的 $N \in \mathbb{N}$,

$$\left| a(x,\,\xi) - \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot\eta} p(x,\,x-y,\,\xi-\eta)\chi_0(y/\lambda,\,\eta/\lambda)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta/(2\pi)^n \right| \leqslant C_N \lambda^{-N},$$

在上面的积分中取 $y = \lambda^{-\delta}y', \eta = \lambda^\delta \eta'$,验证函数

$$q(x,\,y,\,\xi,\,\eta) = p(x,\,x - \lambda^{-\delta}y,\,\xi - \lambda^\delta \eta)\chi_0(\lambda^{-\delta}y/\lambda,\,\lambda^\delta\eta/\lambda)$$

满足估计

$$\forall\,\alpha,\,\beta,\,x,\,y,\,\xi,\,\eta,\ \ |\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta q| \leqslant C_{\alpha\beta}\lambda^m.$$

由此得到 $|a(x,\,\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^m$,进而 $a \in S^m_{\rho,\,\delta}$.

d) 我们设 $\rho > \delta \geqslant 0$. 证明 a 仍然满足

$$a(x,\,\xi) \sim \sum_{\alpha \geqslant 0} \frac{1}{\alpha!}\,\partial_y^\alpha D_\xi^\alpha p(x,\,y,\,\xi)\big|_{y=x}.$$

注 本题表明,当 $\rho \geqslant \delta, \delta < 1$ 时,$(\rho,\,\delta)$ 型拟微分算子在取共轭运算和乘积运算下是封闭的. 而且,当 $\rho > \delta$ 时,这类算子具有和课文 I.3, I.4 节完全类似的象征演算. 最后我们注意到 $\delta < 1$ 是一个非常关键的假设: 一个 (1, 1) 型算子的共轭算子一般来说不是 (1, 1) 型的. (详细的研究可参阅 [H8])

5.1. L^2 **连续性**

设 $x_0 \in \mathbb{R}^n,\ \xi_0 \in \mathbb{R}^n$ 满足 $|\xi_0| = 1,\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \lambda \geqslant 1$. 考虑

$$u_\lambda(x) = \lambda^{n/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x\cdot\xi_0}\varphi(\lambda^{1/2}(x - x_0)).$$

a) 计算 $|u_\lambda|_0$.

b) 设 $a \in S^m$. 证明存在 $b_\lambda \in S^m$ 满足:

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x\cdot\xi_0}a(x,\,D)u_\lambda = \lambda^{n/4}b_\lambda(y,\,D)\varphi|_{y=\lambda^{1/2}(x-x_0)}.$$

证明存在 $M \in \mathbb{N}$ 满足:

$$|b_\lambda(y,\,\eta) - a(x_0,\,\lambda\xi_0)| \leqslant C\lambda^{m-1/2}(1+|y|+|\eta|)^M.$$

(我们可以区分 $|\eta|$ 大于或者小于 $\lambda^{1/2}/2$ 这两种情况).

c) 由此推出 $(a(x,\,D)u_\lambda,\,u_\lambda) = a(x_0,\,\lambda\xi_0)|\varphi|_0^2 + O(\lambda^{m-1/2})$.

d) 证明若 $a(x, D)$ 在 L^2 上有界, 则对于所有的 $\varepsilon > 0$ 我们有 $a \in S^\varepsilon$, 且 $|a(x,\,\xi)| \leqslant C$ (利用习题 2.4, 首先注意到 $|a(x,\,\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^{m-1/2}$).

5.2. 在本题中我们将看到 (历史上) 最早的关于拟微分算子在 L^2 上连续性的证明: 我们假设象征是 0 次齐次的.

这样设 $a = a(x, \xi) \in S^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ 在区域 $|\xi| \geqslant 1$ 上和一个对于 ξ 是 0 次齐次的函数 $\sigma(x, \xi)$ 重合. (注意到该函数的齐次次数使我们有可能定义 $\sigma(x, D)$).

a) 证明若 $\sigma(x, D)$ 在 L^2 上有界, 则 $a(x, D)$ 也在 L^2 上有界. (我们可以对于一个在 $\xi = 0$ 附近取值为 0 而当 $|\xi| \geqslant 1$ 时取值为 1 的函数 $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 研究 $a(x, D) - \sigma(x, D)\chi(D)$).

b) 我们假设 $n = 1$. 证明 $\sigma(x, D)$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上是有界的.

c) 现在假设 $n \geqslant 2$ 并承认下述关于把函数分解成球谐函数的定理:

存在 $L^2(S^{n-1})$ 的一组由 S^{n-1} 上的 C^∞ 函数构成的 Hilbert 基 $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$, 使得当 $k \to +\infty$ 时任意函数 $f \in C^\infty(S^{n-1})$ 的 Fourier 系数都是速降的, 且对于某个 M 我们有 $\|h_k\|_{L^\infty(S^{n-1})} = O(k^M)$. ①

对 $n = 2$, 这就是通常的 Fourier 级数分解.

证明我们有等式

$$\sigma(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k(x) h_k(\xi/|\xi|),$$

其中 $\|\sigma_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ 关于 k 是速降的. 由此推出 $\sigma(x, D)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上是有界的.

注 注意到在上述证明中我们对在 a 或者 σ 关于 x 的正则性没有任何要求, 只需要它们是 L^∞ 的. 这和我们要求 σ 对于 ξ 齐次有关.

更精确地说, 若 a 仅仅满足估计

$$\forall\alpha, |\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leqslant C_\alpha(1 + |\xi|)^{-|\alpha|},$$

那么算子 $a(x, D)$ 在 L^2 上未必是有界的.

另一方面, 可以证明 (参见 [Hw] 定理 9) 只需再有下述估计该算子就肯定是有界的了:

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \forall\alpha, \quad |\partial_{x_i}\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leqslant C_\alpha(1 + |\xi|)^{-|\alpha|}.$$

5.3* 本习题给出定理 5.1 的一个不用到象征演算的证明.

设 $a \in C^{2n}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ 对于 $\alpha \in \{0, 1\}^n$, $\beta \in \{0, 1\}^n$ 满足 $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a| \leqslant C$. 我们来证明 $a(x, D)$ 在 L^2 上是有界的. 我们记

$$\|a\| = \sum_{\substack{\alpha \in \{0, 1\}^n, \\ \beta \in \{0, 1\}^n}} \sup \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\alpha a\right|.$$

①译校者注: 读者可以考虑取球面上 Laplace-Beltrami 算子的一组特征函数, 利用 Peter-Weyl 定理证明它们构成 $L^2(S^{n-1})$ 的一组基, 再由通常的分部积分技巧和 Parseval 恒等式证明定理的后半部分.

a) 准备工作. 设 $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. 验证

$$\tilde{u}(x,\,\xi) = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}\varphi(x-y)\hat{u}(y)\,\mathrm{d}y,$$
$$\tilde{v}(x,\,\xi) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\eta}\varphi(\xi-\eta)\hat{v}(\eta)\,\mathrm{d}\eta$$

都在 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 中.

b) 证明我们只需得到下述不等式:$\forall a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, $\forall u \in \mathcal{S}$, $\forall v \in \mathcal{S}$,

$$|(a(x,\,D)u,\,v)| \leqslant C\|a\|\,|u|_{L^2}|v|_{L^2}.$$

c) 我们记 $\varphi(x) = \prod_{j=1}^{n}(1+\mathrm{i}x_j)^{-1}$, $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$ 按照 a) 的方式定义. 那么

$$(a(x,\,D)u,\,v) = \iiint \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi}a(x,\,\xi)u(y)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}\xi}{(2\pi)^n}.$$

关于 ξ 作分部积分, 证明存在某个满足 $\sum_{\alpha\in\{0,\,1\}^n}\sup|\partial_x^\alpha b| \leqslant C\|a\|$ 的函数 $b \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$,使得

$$(a(x,\,D)u,\,v) = \iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}b(x,\,\xi)\tilde{u}(x,\,\xi)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi.$$

d) 把 Fourier 逆变换公式 $v(x) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\eta}\hat{v}(\eta)\frac{\mathrm{d}\eta}{(2\pi)^n}$ 代入上面的积分中, 对 x 作分部积分,证明存在某个满足 $\sup|c_\alpha| \leqslant C\,\|a\|$ 的函数 $c_\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$,使得

$$(a(x,\,D)u,\,v) = \sum_{\alpha\in\{0,\,1\}^n}\iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}c_\alpha(x,\,\xi)\partial_x^\alpha\tilde{u}(x,\,\xi)\overline{\tilde{v}(x,\,\xi)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi.$$

总结得到的结果.

注 显然在本题中我们证明了比定理 5.1 广泛得多的结果: 它给出了 $S^0_{0,\,0}$ 类算子的 L^2 连续性 (参见习题 2.9 和 [Hw]),而定理 5.1 对此是无能为力的. 在另一方面,习题 4.12 对于 $1 \geqslant \rho > \delta \geqslant 0$ 给出了类 $S^m_{\rho,\,\delta}$ 上的一种象征演算,这样就可以得到 $S^0_{\rho,\,\delta}$ 类算子的 L^2 连续性.

当 $1 > \rho = \delta > 0$ 时,习题 5.3 中的证明 ([Hw]) 可以照搬过去,但对于 $0 \leqslant \rho < \delta \leqslant 1$ 或者 $\rho = \delta = 1$ 的情形我们并不能保证 L^2 连续性 (参见 Coifman–Meyer[CM]).

5.4* **奇异积分**

设 $k \in C^0(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ 是局部 Lipschitz 函数,满足

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |k(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^n}, \quad |\partial_x k(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{n+1}}.$$

(这样 $k(x-y)$ 就满足 0 阶拟微分算子的核函数在对角线 $\{x=y\}$ 外的一些估计 (参见习题 3.2)).

这里我们要研究算子的 “主部”

$$Au(x)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}k(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y$$

的存在性和 L^2 连续性.

a) 证明对于任意的 $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), Au$ 在 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中都是有定义的, 当且仅当下述条件被满足:

$$\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1}k(x)\,\mathrm{d}x \text{ 在 } \varepsilon \text{ 趋于 0 时有极限.} \tag{$*$}$$

(把 $Au(x)$ 和 $u(x)\displaystyle\int_{\varepsilon\leqslant|y|\leqslant 1}k(y)\,\mathrm{d}y$ 做比较). 验证函数族 $k_\varepsilon=k\cdot 1_{\{|x|\geqslant\varepsilon\}}$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中收敛到一个分布, 记为 k_0, 而且我们有: A 在 L^2 上有界当且仅当 $\hat{k}_0\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

b) 验证 $\hat{k}_\varepsilon\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 且对于 $\varepsilon>0$ 及任意满足 $|\xi|\geqslant 1/\varepsilon$ 的 ξ 我们有 $|\hat{k}_\varepsilon(\xi)|\leqslant C$. (我们可以对 $j=1,\cdots,n$ 来估计 $\xi_j\hat{k}_\varepsilon(\xi)$).

c) 若 $|\xi|\leqslant 1/\varepsilon$, 记 $\hat{k}_\varepsilon(\xi)=I_\varepsilon(\xi)+J(\xi)$, 其中 $J(\xi)=\displaystyle\int_{|x|\geqslant 1/|\xi|}k(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x$. 验证 $|J(\xi)|\leqslant C$ 且

$$\left|I_\varepsilon(\xi)-\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1/|\xi|}k(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant C.$$

由此得到, 在条件 $(*)$ 下, 算子 A 在 L^2 上的有界性等价于:

$$\int_{1\leqslant|x|\leqslant R}k(x)\,\mathrm{d}x \text{ 在 } R\to+\infty \text{ 时保持有界.} \tag{$**$}$$

当 k 是 $-n$ 次齐次函数的时候 $(*)$ 和 $(**)$ 该作怎样的修正?

d) 验证具有核函数 $k(x)=\dfrac{|x|^{\mathrm{i}\gamma-n}}{1+|\log|x||}$ 的算子 A 是有定义的且在 L^2 上有界. (其中 $\gamma\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$).

e) 取 $k(x)=|x|^{\mathrm{i}\gamma-n}$, 验证 k 不满足条件 $(*)$, 但是对于任何模长为 1 的复数 α, 我们可以定义

$$A_\alpha u(x)=\lim_{n\to\infty}\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon_n}k(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y,$$

其中 $\varepsilon_n\to 0^+$, $\varepsilon_n^{\mathrm{i}\gamma}\to\alpha$. 验证 $A_\alpha-A_\beta=\dfrac{\alpha-\beta}{\mathrm{i}\gamma}$ 且 A_α 在 L^2 上是有界的.

5.5. 设 $B(L^2)$ 是 L^2 上有界算子全体, 它具有自然的 Banach 空间结构.

a) 验证映射

$$S^0\to B(L^2),$$
$$a\mapsto a(x,D)$$

是连续的. 它的像是闭的么?

b) 设 $a \in S^0$. 证明映射

$$[0, 1] \to B(L^2),$$
$$\varepsilon \mapsto a(x, \varepsilon D)$$

一般来说不是连续的,但是对于 $B(L^2)$ 上的简单收敛拓扑是连续的.

5.6. 对于整数 s, 证明 $H^s = \{u \in L^2,\ D^\alpha u \in L^2,\ |\alpha| \leqslant s\}$.

5.7. 若 $s > n/2$, 证明 H^s 的元素都是在无穷远处趋于 0 的连续函数, 而且我们有

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| \leqslant C|u|_s.$$

5.8. $\mathbb{R}^n$ 上的 Dirac 质量 δ 在哪个 Sobolev 空间中?

5.9. 在本题中我们将确定所有的局部拟微分算子 P, 也就是说对于任意 $u \in \mathcal{S}$,使得 $\operatorname{supp} Pu \subset \operatorname{supp} u$ 的拟微分算子 P.

例如所有的微分算子都是局部的. 我们将证明没有别的了 (这也可以从 Peetre 的一个一般定理推导出来).

a) 设 P 是一个阶数 $m < -n/2$ 的局部拟微分算子. 设 $x_0 \in \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{S}$. 证明存在序列 $u_k \in \mathcal{S}$ 使得对于任意的 k,在 x_0 附近 $u_k = 0$, 且在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中 $u_k \to u$. 由此证明 $Pu(x_0) = 0$ (利用习题 5.7).

b) 设 P 是局部算子且阶数 < 0. 证明 $P = 0$ (利用习题 4.2).

c) 设 P 是局部算子且阶数 $m < k \in \mathbb{N}$. 设 $f_1, \cdots, f_k$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是 C^∞ 的,且这些函数和它们的任意阶导数都是有界的. 证明 $\mathrm{Ad} f_1 \cdots \mathrm{Ad} f_k P = 0$ ($(\mathrm{Ad} A)B = [A, B] = AB - BA$). 由此推出如果 $u \in \mathcal{S}$ 对于 $j \leqslant k-1$ 有 $u^{(j)}(x_0) = 0$, 那么 $Pu(x_0) = 0$. 据此得到 $P = \sum_{|\alpha| \leqslant k-1} a_\alpha D^\alpha$,其中 a_α 是 C^∞ 的,且这些函数和它们的任意阶导数都是有界的. (我们可以用 Taylor 展开式).

5.10. 设 $r \in S^{-\infty}$ 满足: $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ r(x, 0) = 1$. 对于 $\varepsilon > 0$, 我们记 $\rho_\varepsilon = r(x, \varepsilon D)$.

a) 对于所有的 $u \in \mathcal{S},\ m > 0$,证明不等式 $|\rho_\varepsilon u|_0 \leqslant C|u|_0,\ |u - \rho_\varepsilon u|_0 \leqslant C_m \varepsilon^m |u|_m$. 由此推出对于任意的 $u \in L^2$, 当 $\varepsilon \to 0$ 时在 L^2 中 $\rho_\varepsilon u \to u$, 且对于负数阶算子 A, $\rho_\varepsilon A$ 依范数收敛于 A.

b) 设 L 是一个 1 阶拟微分算子. 证明对于任意 $u \in \mathcal{S}$ 我们有 $|[L, \rho_\varepsilon]u|_0 \leqslant C|u|_0$. 记 $D(L) = \{u \in L^2,\ Lu \in L^2\}$ 并在 $D(L)$ 上取范数 $|u|_0 + |Lu|_0$. 证明 $D(L)$ 是一个 Hilbert 空间,且 $H^{+\infty}$(进而 $\mathcal{S}$) 在其中是稠密的.

5.11. 设 P 是一个 1 阶拟微分算子. 对 $s \in \mathbb{R}$ 和 $k \in \mathbb{N}$, 定义:

$$H^{s,k}(P) = \{u \in H^s,\ \text{对所有的} j \leqslant k,\ P^j u \in H^s\}.$$

a) 证明若 A 是一个 0 阶拟微分算子, 则 $u \in H^{s,k}(P)$ 推出 $Au \in H^{s,k}(P)$. (特别我们有: $u \in H^s$ 和 $Pu \in H^{s+k-1}$ 推出 $Au \in H^{s,k}(P)$).

b) 设对于 $p, q \in S^1$ 存在某一个 $a \in S^0$ 满足 $p - aq \in S^0$. 证明 $H^{s,k}(q(x, D)) \subset H^{s,k}(p(x, D))$.

5.12. **椭圆算子和 Gårding 不等式**

设 $a \in S^0$.

a) 假设 $a(x, D)$ 满足下述 Gårding 不等式:

$$\forall u \in \mathcal{S}, \operatorname{Re}(a(x, D)u, u) + C|u|_{-\delta}^2 \geqslant c_0|u|_0^2.$$

证明当 $|\xi|$ 足够大的时候 $\operatorname{Re} a(x, \xi) \geqslant c_0$ (利用习题 5.1).

b) 我们设 $a(x, D)$ 满足椭圆型不等式 $|u|_0 \leqslant C(|a(x, D)u|_0 + |u|_{-\delta})$. 证明 a 是 0 阶椭圆型的.

c) 对于 $a \in S^m$, $m \in \mathbb{R}$ 重新讨论 a) 和 b).

5.13. 设象征 $a \in S^m$ 对于充分大的 ξ 满足 $\operatorname{Re} a(x, \xi) \geqslant C|\xi|^m$. 令 k 是一个大于 1 的整数, 证明存在 $b \in S^{m/k}$ 满足在模 $-\infty$ 阶算子意义下 $b(x, D)^k = a(x, D)$.

5.14. 设 $a \in S^0$ 对于 $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 满足 $|a(x, \xi)| \geqslant C > 0$. 我们将证明, 对于充分小的 $\varepsilon > 0$, $a(x, \varepsilon D)$ 是可逆的. (注意这并不是 $|a(x, 0)| \geqslant C$ 的推论; 参见习题 5.5.b)).

a) 对 $\varepsilon \in [0, 1]$, 定义 $a_\varepsilon(x, \xi) = a(x, \varepsilon\xi)$. 证明对于 $\varepsilon \in (0, 1), q_\varepsilon = \dfrac{a_\varepsilon - a_0}{\varepsilon}$ 在 S^1 中有界.

b) 验证 $a_\varepsilon \# 1/a_\varepsilon = 1 + \varepsilon(q_\varepsilon \# 1/a_\varepsilon - q_\varepsilon/a_\varepsilon)$, 由此推出, 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $a_\varepsilon(x, D)$ 是 L^2 上同构.

6.1. **单位分解**

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集, $(U_i)_{i\in I}$ 是一族覆盖 Ω 的相对紧开集. 我们将证明存在一族函数 $(\varphi_i)_{i\in I}$, 满足:

i) $\forall i$, $\varphi_i \in C_0^\infty(U_i)$, $0 \leqslant \varphi_i \leqslant 1$.

ii) $(\operatorname{supp}\varphi_i)$ 是局部有限的. (也就是说对于 Ω 中任何一个紧子集 K, 除了有限个指标 $i \in I$ 外我们都有 $K \cap \operatorname{supp}\varphi_i = \varnothing$).

iii) 在 Ω 中, $\sum_{i\in I} \varphi_i = 1$. (根据 ii), 这个和式是有定义的).

a) 证明我们可以假设 $I = \mathbb{N}$.

b) 我们假设 (U_i) 是局部有限的. 证明存在一族开集 (V_i) 使得 $\forall i \in I$, $\overline{V}_i \subset U_i$, 且 $\Omega = \bigcup_{i\in I} V_i$. (我们可以归纳地构造 V_i, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Omega = \bigcup_{i\leqslant n} V_i \cup \bigcup_{j>n} U_j$).

然后我们选择 $\psi_i \in C_0^\infty(U_i)$, $\psi_i \geqslant 0$, 使得在 V_i 上 $\psi_i > 0$, 且 $\varphi_i = \dfrac{\psi_i}{\sum_{j\in I}\psi_j}$ 是问题的一个解.

c) 一般情况. 构造一个由 Ω 中相对紧开子集构成的局部有限集合列 (A_n) 来覆盖 Ω. 对任意的 n, 选择一个有限子集 $I_n \subset I$ 使得 $\overline{A}_n \subset \bigcup_{i\in I_n} U_i$. 对 $i \in I_n$ 我们记 $U'_{n,i} = U_i \cap A_n$.

证明 $U'_{n,i}$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in I_n$, 构成了 Ω 的一个局部有限覆盖; 如 b) 中一样选择一个单位分解 $(\varphi'_{n,i})$, 定义

$$\varphi_i = \sum_{n|_{i\in I_n}} \varphi'_{n,i}.$$

在下面的习题中,我们用 $\psi^m_{ps}(\Omega)$ 来表示恰当支撑于 Ω 上的 m 阶拟微分算子空间.

6.2. a) 证明性质 2.3 可以推广到 $S^{+\infty}_{\text{loc}}(\Omega\times\mathbb{R}^n)$ 上.

b) 将象征演算定理 3.2.3 和 4.1 推广到 Ω 上恰当支撑的算子类上.

c) 设 $a \in S^m_{\text{loc}}(\Omega\times\mathbb{R}^n)$, 并设 $A \in \Psi^m_{ps}(\Omega)$ 具有象征 a. 证明一个满足 $BA = I + R$ (或者 $AB = I + R$,其中 R 是一个 C^∞ 核函数) 的算子 $B \in \Psi^m_{ps}(\Omega)$ 的存在性等价于 a 满足下述条件: 对 Ω 中任何紧集 K, 存在 $C_K > 0$ 和 R_K 使得 $\forall x \in K$ 和任何满足 $|\xi| \geqslant R_K$ 的 ξ, $|a(x,\xi)| \geqslant C_K|\xi|^m$. (我们称 a (或 A) 是 m 阶椭圆的).

d) 设 $p_m(x,\xi)$ ($(x,\xi) \in \Omega\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$) 是一个关于 ξ 的 m 次齐次函数. 设 $P \in \Psi^m_{ps}(\Omega)$ 具有象征 p,满足 $p - \tilde{p}_m \in S^{m-1}_{\text{loc}}$ (函数 $\tilde{p}_m \in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^n)$ 和 p_m 在区域 $|\xi| \geqslant 1$ 上重合): p_m 被称作 P 的主象征. (参见第 I.7.2.2 节). 当 p_m 满足什么样的条件时 P 是 m 阶椭圆的?

6.3. a) 设 $A \in \Psi^m_{ps}(\Omega)$. 证明对于 Ω 的任意紧子集 K 和任意实数 s, 存在 $C_{k,s} > 0$ 满足:

$$\forall u \in C_0^\infty(K),\ |Au|_s \leqslant C_K|u|_{s+m}.$$

b) 记

$$H^s_{\text{loc}}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)\},$$

其拓扑是由半范数 $|\varphi u|_s$ 定义的, 其中 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. 证明 a) 中的不等式意味着 A 是一个从 $H^{s+m}_{\text{loc}}(\Omega)$ 到 $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ 的有界算子.

6.4. 这个习题用在 L^2 上的作用给出局部拟微分算子的一个刻画 (参见 [CM]).

a) 设 T 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的一个有界线性算子,其核函数具有紧支集. 对 $\xi \in \mathbb{R}^n$, 考虑函数 $e_\xi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}$, 并定义:

$$\sigma_T(x,\xi) = T(e_\xi)(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}.$$

验证 σ_T 的存在性, 并验证这个取值在 $L^2(\mathbb{R}^n_x)$ 中的函数对于 ξ 是连续的. 最后, 验证

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\int|\sigma_T(x,\,\xi)|^2\,\mathrm{d}x<+\infty,$$

而且 $\forall u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $Tu(x)=\displaystyle\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\sigma_T(x,\,\xi)\hat{u}(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{(2\pi)^n}$ (利用诸如对任意的 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle Tu,\,\varphi\rangle=\langle u,\,T^*\varphi\rangle=(2\pi)^{-n}\int\hat{u}(\xi)\langle e_\xi,\,T^*\varphi\rangle\,\mathrm{d}\xi$$

这样一些事实).

b) 我们以 $\mathcal{T}$ 记这样的算子 T 全体: 对于任何一组向量场 $X_1,\cdots,X_k$, 算子 $ad(X_1)\cdots ad(X_k)T$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上是有界的.

i) 证明任何具有紧支集核函数的 0 阶拟微分算子是 $\mathcal{T}$ 的元素.

ii) 证明若 T_1,T_2 是 $\mathcal{T}$ 中元素,则 T_1T_2 也是 $\mathcal{T}$ 中元素.

iii) 我们记 $\Sigma=\{\sigma_T,T\in\mathcal{T}\}$. 证明 Σ 对于下列操作是稳定的: 乘上一个 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数,$\partial/\partial x_j$, $\partial/\partial\xi_j$, $\xi_k\partial/\partial\xi_j$, 对任意的 $j,\,k\in\{1,\cdots,n\}$.

iv) 利用 a),证明 $\Sigma\subset S^0(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$.

c) 对于 $\mathbb{R}^n$ 的一个紧子集 Ω 上的恰当支撑算子陈述并证明类似于 b) 的结论.

d) 记 $\sigma(\xi)=\exp(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\langle\xi\rangle})\,\mathrm{e}^{-\langle\xi\rangle^{1/2}}$, 其中 $\langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2}$. 证明对于任意实数 s 和 $t,\sigma(D)$ 都是一个从 H^s 到 H^t 的有界算子, 且对于任何一族象征在 S^1 中的向量场 $X_1,\cdots,X_k$,算子 $ad(X_1)\cdots ad(X_k)\sigma(D)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上是有界的. 象征 σ 在 S^0 中么?

6.5* a) 设 $s,\,t$ 是 $[0,\,1)$ 中满足 $s+t<1$ 的两个数. 设 $A\in\Psi_{ps}^{-m}(\Omega)$, $m=s+t$, P 和 $Q\in\Psi_{ps}^1(\Omega)$: 假设 P 和 Q 都有实值主象征.

证明对于 Ω 中任意紧子集 K,存在 $C_K>0$ 满足:

$$\forall u\in C_0^\infty(K),\quad |(Au,\,PQu)|\leqslant C_K(|u|_0^2+|Pu|_{-s}^2+|Qu|_{-t}^2).$$

我们特别取 $A=E^*E[P,\,Q]$, 其中 $E\in\Psi^{-(m+1)/2}$ 是一个椭圆算子, 可以得到

$$\forall u\in C_0^\infty(K),\quad |[P,\,Q]u|_{-(1+s+t)/2}\leqslant C_K'(|u|_0+|Pu|_{-s}+|Qu|_{-t}).$$

b) 设 $X_1,\cdots,X_p$ 是 Ω 上实 C^∞ 向量场. 假设对于 Ω 中任意一点 x, 向量 $X_i(x)$, $[X_j,\,X_k](x)$($1\leqslant i\leqslant p$, $1\leqslant j<k\leqslant p$) 可以生成 $\mathbb{R}^n$.

i) 对 $s=t=0$ 利用 a) 中结论, 推导出下述估计

$$\forall u\in C_0^\infty(K),\quad |u|_{1/2}\leqslant C_K\left(|u|_0+\sum_{i=1}^p|X_iu|_0\right).$$

ii) 现在设 $u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ 满足对于任意的 i, $X_i u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$. 对 $R_\varepsilon u$ 应用上述不等式,其中

$$R_\varepsilon = \varphi\chi(\varepsilon D)\varphi,\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \chi \in \mathcal{S}\ 且\chi(0) = 1,$$

证明 $u \in H^{1/2}_{\text{loc}}(\Omega)$. (我们可以注意到 $R_\varepsilon = r_\varepsilon(x, D)$, 其中 (r_ε) 是 $S^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ 中的一个有界族).

iii) 设 $u \in \mathcal{D}'$ 满足对于任意的 i, $X_i u \in H^s_{\text{loc}}(\Omega)$. 证明 $u \in H^{s+1/2}_{\text{loc}}(\Omega)$. (我们注意到对于任意一点 $x \in \Omega$ 都存在一个开邻域 ω 使得对于适当的 σ, $u \in H^\sigma_{\text{loc}}(\omega)$). 证明若 $X_i u \in C^\infty(\Omega)$, $1 \leqslant i \leqslant p$, 则 $u \in C^\infty(\Omega)$.

iv) 在 $\mathbb{R}^2$ 上, 我们考虑 $X_1 = \partial/\partial x$, $X_2 = x\partial/\partial y$. 设 φ, ψ 是 $\mathbb{R}$ 上两个具有紧支集的 C^∞ 函数, 其中 $\operatorname{supp}\psi \subset [1, 2]$. 对 $\lambda \geqslant 1$, 记

$$u_\lambda(x, y) = \psi(\lambda x)\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}y\eta}\varphi(x\sqrt{\eta})\,\mathrm{d}\eta.$$

对 $s \geqslant 0$, 当 $\lambda \to +\infty$ 时给出 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \|u_\lambda(x, \cdot)\|^2_{H^s}\,\mathrm{d}x$ 和 $|X_i u_\lambda|_0^2$ 的估计, 由此说明上面的结果是最优的.

c) 仍然取 Ω 上的向量场 $X_i, \cdots, X_p$, 这次我们假设在每一点 $x \in \Omega$, $\mathbb{R}^n$ 由 $X_I(x)$ 生成, $|I| \leqslant r$, 其中我们规定

$$若I = (i_1, \cdots, i_q) \in \{1, \cdots, p\}^q,\ \ q = |I|,\ \ X_I = (adX_{i_1})\cdots(adX_{i_{q-1}})X_{i_q}.$$

用和 b) 同样的方法推理,证明存在 $\delta > 0$ 使得: 若 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 满足 $X_i u \in H^s_{\text{loc}}(\Omega)$, $1 \leqslant i \leqslant p$,则 $u \in H^{s+\delta}_{\text{loc}}(\Omega)$.

注 与 b) 不同的地方在于, 通过这个方法得到的 δ 不是最优的. (我们可以证明,最多可以得到 $1/r$).

6.6. 设 $X_1, \cdots, X_p$ 是 Ω 上 C^∞ 向量场. 记

$$P = \sum_{i=1}^p X_i^2.$$

a) 证明下述估计: 对于 Ω 的任意紧子集 K, 任意 $s \in \mathbb{R}, u \in C_0^\infty(K)$,

$$\sum_{i=1}^p |X_i u|_s^2 \leqslant |\mathrm{Re}\,(Pu, u)_s| + C_{K,s}|u|_s^2,$$

其中 $(v, w)_s$ 表示 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 中的数量积.

b) 利用习题 6.5.b)ii) 中的思路, 证明若 $u \in H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ 满足 $Pu \in H^s_{\text{loc}}(\Omega)$, 则对于 $1 \leqslant i \leqslant p$ 我们有 $X_i u \in H^s_{\text{loc}}(\Omega)$.

c) 设 X_i 满足习题 6.5.c) 的假设. 设 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. 如果 $Pu \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 我们可以得到 u 的什么性质? 如果 $Pu \in C^\infty(\Omega)$ 呢?

6.7.* 设 $P \in \Psi^1_{ps}(\Omega)$ 具有满足下述条件的主象征 p_1:

$$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ p_1(x, \xi) = 0 \Rightarrow \{\mathrm{Re}\, p_1, \mathrm{Im}\, p_1\}(x, \xi) > 0.$$

a) 设 E 是一个主象征为 $|\xi|^{-1}$ 的 -1 阶恰当支撑算子. 证明存在正常数 C_0 使得算子

$$Q = [P^*, P] + C_0 E P^* P$$

满足 Gårding 不等式的假设.

b) 证明对于 Ω 中任何紧子集 K,都存在常数 $C_K > 0$,使得

$$\forall u \in C_0^\infty(K), \quad |u|_{1/2} \leqslant C_K(|Pu|_0 + |u|_0).$$

由此,利用一个形如习题 6.5.b) 中出现的光滑化子, 推出若 $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 且 $Pu \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 则 $u \in H^{1/2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$; 由此得到若 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 满足 $Pu \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 则 $u \in H^{s+1/2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. (参考习题 6.5 的推理过程).

P 被称作 “可以得到半阶正则性的半椭圆算子”.

6.8* 单变量传输条件

a) 准备工作. 对 $\mu \in \mathbb{R}$ 和满足当 $\xi \geqslant 1$ 时 $\chi(\xi) = 1$, 当 $\xi \leqslant 1/2$ 时 $\chi(\xi) = 0$ 的函数 $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, 定义:

$$u_\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\, \chi(\xi)\, \xi^\mu\, \mathrm{d}\xi.$$

我们知道 (参见习题 4.6), u_μ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个在 $x = 0$ 之外 C^∞ 的分布. 证明对于 $x > 0$ 我们有:

<u>若 $\mu \notin \{-1, -2, -3, \cdots\}$</u>

$$u_\mu(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(\mu+1)}\Gamma(\mu+1)x^{-\mu-1} \bmod C^\infty([0, +\infty)),$$
$$u_\mu(-x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(\mu+1)}\Gamma(\mu+1)x^{-\mu-1} \bmod C^\infty([0, +\infty)).$$

且<u>若 $n \in \{1, 2, 3, \cdots\}$</u>

$$u_{-n}(x) = \mathrm{i}^{n+1}x^{n-1}\log x \bmod C^\infty([0, +\infty))$$
$$u_{-n}(-x) = (-\mathrm{i})^{n+1}x^{n-1}\log x \bmod C^\infty([0, +\infty)).$$

这里, Γ 表示对于 $\mathrm{Re}\, z > 0$ 由 $\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t$ 定义,再通过亚纯延拓到整个复平面上的 Euler 函数 (或称 Gamma 函数). (提示: 先考虑 $\mu > -1$ 的情形,比较 u_μ 和 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\xi^\mu\,\mathrm{d}\xi$, 然后注意到 $D_x u_\mu = u_{\mu+1}$).

b) 设 $\lambda \sim \sum \lambda_j$ 是 $\mathbb{R}$ 上 m 阶古典象征. 记

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \lambda(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

证明 $u|_{x>0}$ 可以延拓成一个 C^∞ 函数当且仅当: $\forall j \in \mathbb{N}$, $\lambda_j(-1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(m-j)}\lambda_j(1)$, 也就是说 $\lambda_j(\xi)$ 可以全纯地延拓到 $\mathrm{Im}\xi > 0$.

c) 设 $a \sim \sum\limits_{j\geqslant 0} a_j$ 是 $\mathbb{R}$ 上 m 阶古典象征. 我们称算子 $a(x, D)$ 对于 $(0, +\infty)$ 满足传输条件, 如果 $\forall u \in C_0^\infty([0, +\infty))$, 函数 $a(x, D)(u^0)|_{x>0}$ 可以延拓成一个 C^∞ 函数. (这里 u^0 是通过对 $x<0$ 定义 $u^0(x)=0$ 而得到的 u 在 $\mathbb{R}$ 上的延拓).

证明对于 $u \in C_0^\infty([0, +\infty))$,

$$a(x, D)u^0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \lambda(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

其中 λ 是一个 m 阶古典象征, 满足 $\lambda_0(\xi) = -\mathrm{i}\xi^{-1}a_0(0, \xi)u(0)$. (首先注意到 $\hat{u}^0(\xi)$ 是一个 -1 阶古典象征,我们可以计算其渐近展式; 然后参考附录中的定理 2, 计算 λ 依赖于 a 的表达式).

由此得到, 只要 $a(x, D)$ 满足下述条件, 它就满足传输条件:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall j \in \mathbb{N},\ \partial_x^k a_j(0, -1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(m-j)}\partial_x^k a_j(0, 1). \tag{$*$}$$

d) 反过来可以证明, 若 $a(x, D)$ 满足传输条件, 则 $(*)$ 成立. (先证明 $j=k=0$ 的情况, 然后注意到如果 $a(x, D)$ 满足传输条件, $[D, a(x, D)]$ 也满足该条件).

7.1.* **驻相公式**

a) 设 q 是 $\mathbb{R}^n$ 上非退化二次型, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. 我们来研究积分

$$I(\lambda) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda q(x)/2} u(x)\,\mathrm{d}x$$

在 $\lambda \to +\infty$ 时的渐近性态. 为此, 记 $x = y/\sqrt{\lambda}$, 代入积分式, 并把 u 在 0 点的一个邻域中展开; 利用附录中的定理 1 来估计余项, 证明我们可以得到一个 λ 的幂级数作为渐近展式, 其每一项都可以借助习题 4.9.b) 算出来:

$$I(\lambda) \sim \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma\pi/4}}{|\det q|^{1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} (2\mathrm{i}\lambda)^{-k} \left(\frac{\hat{q}(D)^k}{k!}u\right)(0),$$

其中 σ 是 q 的符号.

我们假设有实值函数 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 具有唯一的临界点 x_0 使得 $f(x_0) = 0$, 且 Hesse 矩阵 $q = f''(x_0)$ 是非退化的. 对 $u \in C_0^\infty$, 我们来研究:

$$I_f(\lambda) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda f(x)} u(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Morse 引理. 证明存在 x_0 的邻域 V 和一个从 V 到 0 点的一个邻域之间的局部微分同胚 φ,使得

$$\forall x \in V, \quad f(x) = \frac{1}{2}q(\varphi(x)).$$

为此, 考虑具有形式 $B(x)(x - x_0)$ (其中 $B(x_0) = I$) 的 $\varphi(x)$. 注意到我们有

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle A(x)(x - x_0), x - x_0\rangle$$

其中 $A(x)$ 是对称的,而 $A(x_0)$ 就是 q 的矩阵, 这样我们只需要对 x_0 附近的 x 解:

$$B(x)^* A(x_0)B(x) = A(x), \quad B(x_0) = I.$$

对于定义在 $B = I$ 附近的映射 $B \mapsto B^* A(x_0)B$ 应用局部逆函数定理 (例如, III.A.1 节中所陈述的版本) 就可以得到结论.

c) 由 a) 和 b) 得到 $I_f(\lambda)$ 以一个 λ 的幂级数作为渐近展开,其首项为

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma\pi/4}|\det f''(x_0)|^{-1/2}u(x_0),$$

这里 σ 是 Hesse 矩阵 $f''(x_0)$ 的符号. (我们可以利用附录引理 1 来把积分区域局部化到 x_0 附近).

注 我们也可以把 c) 中的渐近展式的每一项都算出来. (参见 [H1], 定理 7.7.6, 那里完全不用到 Morse 引理).

在下文中, M 都表示一个 C^∞ 流形 (紧致集的可数并).

7.2. 证明单位分解定理 (习题 6.1) 在流形 M 上也是成立的.

7.3. 取 M 上正密度 μ (必要时参阅本章习题最后关于流形上密度的注记).

a) 设 $A \in \Psi^m(M)$, $\varphi, \psi \in C_0^\infty(M)$ 满足 $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\psi = \varnothing$. 证明存在 $k \in C_0^\infty(M \times M)$ 满足:

$$\forall u \in C^\infty(M), \forall x \in M, \quad \varphi A\psi u(x) = \int_M k(x, y)u(y)\mu(y).$$

(我们可以先讨论 $\operatorname{supp}\varphi \subset U$, $\operatorname{supp}\psi \subset V$,而 U 和 V 是两个不交的坐标邻域的情形; 这时 $U \cup V$ 也是一个坐标邻域).

b) 证明 $\Psi^{-\infty}(M)$ 恰好是形如:

$$Ku(x) = \int_M k(x, y)u(y)\mu(y) \quad (u \in C_0^\infty(M)),$$

的算子全体,其中 $k \in C^\infty(M \times M)$.

7.4. a) 设 U 是 M 中开集. 若 $A \in \Psi^m(M)$, 证明算子

$$A|_U : C_0^\infty(U) \to C^\infty(U),$$
$$u \mapsto (Au)|_U$$

是 $\Psi^m(U)$ 中的元素. 设 $B \in \Psi^m(U)$, $\varphi, \psi \in C_0^\infty(U)$, 证明 $\varphi B \psi$ 定义了 $\Psi^m(M)$ 的一个元素.

b) 设 $A : C_0^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 是一个连续线性算子. 如果存在 M 的一个开覆盖 (U_i) 使得对所有的 $i, A|_{U_i} \in \Psi^m(U_i)$, 那么 A 是 $\Psi^m(M)$ 中的一个元素么? (我们只需研究 $\mathbb{R}$ 上两个开集的情形!). 证明如果我们还要求 A 满足习题 7.3.a) 中的性质的话, 问题的答案就是肯定的.

c) 设 $(U_i)_{i \in I}$ 是 M 的一个开覆盖, 且对于任意 $i \in I$, 设有 $A_i \in \Psi^m(M)$. 我们假设还有 $\ell \in [-\infty, m)$, 并设对于任意的 i, j,

$$A_i|_{U_i \cap U_j} - A_j|_{U_i \cap U_j} \in \Psi^\ell(U_i \cap U_j).$$

证明存在 $A \in \Psi^m(M)$ 使得对于任意的 i:

$$A|_{U_i} - A_i \in \Psi^\ell(U_i).$$

证明 A 在模 $\Psi^\ell(M)$ 的意义下是唯一的. 换句话说: Ψ^m/Ψ^ℓ 是 M 上的一个层. (提示: 我们可以取 $A = \sum_i \psi_i A_i \varphi_i$, 其中 $\varphi_i, \psi_i \in C_0^\infty(U_i)$ 是适当的函数 $\cdots$).

d) 将 c) 中的结果应用到下述情形:

i) 若 $a \in S^m(T^*M)$ 是 m 次齐次的, 则存在以 a 为主象征的算子 $A \in \Psi^m(M)$.

ii) 设 $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$ 是一列递降到 $-\infty$ 的实数, 对任意的 j, 设 $A_j \in \Psi^{m_j}(M)$. 证明存在 $A \in \Psi^m(M)$ (在模 $\Psi^{-\infty}(M)$ 意义下是唯一的) 使得

$$A \sim \sum_{j=0}^{\infty} A_j,\ \text{也就是说}\ \forall N \in \mathbb{N},\ A - \sum_{j<N} A_j \in \Psi^{m_N}(M).$$

iii) 设 $A \in \Psi^m(M)$ 具有主象征 a_m. 设在 T^*M 上 $a_m \neq 0$. 证明存在 $B \in \Psi^{-\infty}(M)$ 使得 $AB \equiv I \equiv BA \bmod \Psi^{-\infty}(M)$.

7.5. 本习题讨论定理 3.2.3 在流形上的推广. 设 μ 是 M 上一个正密度, 并设 $A \in \Psi^m(M)$. 我们试图证明存在一个算子 $A^* \in \Psi^m(M)$ 满足:

$$\forall u \in C_0^\infty(M), \forall v \in C_0^\infty(M), \qquad \int_M Au \cdot \bar{v}\, \mu = \int_M u \cdot \overline{A^* v}\, \mu.$$

a) 在假设这样的一个算子存在的前提下, 验证它在 $C_0^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 的算子类中是唯一的. (或者在从 $C_0^\infty(M)$ 到 M 上的分布空间的算子类中, 如果读者了解这方面的理论的话).

b) 对某个坐标邻域 U,设 $\varphi, \psi \in C_0^\infty(U)$. 构造 $(\varphi A\psi)^*$. 考虑一个开覆盖 (U_i),其中 $U_0 = U$, 而对于 $i \neq 0$ 有 $U_i \cap \operatorname{supp}\psi = \varnothing$; 利用与之关联的一个单位分解构造出 $(A\psi)^*$.(利用习题 7.3.a)). 最后, 由此构造出 A^*.

c) 证明若 A 的主象征是 a_m, 则 A^* 的主象征是 $\bar{a}_m$.

7.6. a) 证明算子按照第 I.2 节中的定义是古典的这一性质在坐标变换下不变. 由此得到我们可以定义流形 M 上的古典拟微分算子.

b) 设 $A \in \Psi^m(M)$ 是古典的,且具有主象征 a_m. 对 $x \in M$,设有 $\varphi \in C_0^\infty(M)$, 满足 $\varphi(x) = 1$, 并设 $\psi \in C^\infty(M)$ 满足 $\mathrm{d}\psi(x) \neq 0$. 计算 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\psi(x)} A(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\psi}\varphi)(x)$ 依赖于 a_m 的表达式. (利用附录中的定理 3 和习题 7.3.a)).

7.7. 本习题的目的是刻画 $M = \mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$ 上的拟微分算子. 对 $k \in \mathbb{Z}^n$, 我们考虑 $\mathbb{T}^n$ 上的 C^∞ 函数 $e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}$. 设 $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, 我们记 $\hat{u}(k) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\,\mathrm{d}x$. 设 $a = (a(k))_{k\in\mathbb{Z}^n}$ 是一个复数列, 我们用

$$\delta_j a(k) = a(k + \varepsilon_j) - a(k)$$

来定义函数列 $\delta_j a$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, 其中 $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 的典则基. 然后对于 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ 我们用通常的方法定义 δ^α.

a) 设 $A \in \Psi^m(\mathbb{T}^n)$. 对于 $x \in \mathbb{T}^n$ 和 $k \in \mathbb{Z}^n$, 我们定义:

$$a(x, k) = e_{-k}(x) A e_k(x).$$

验证 $|a(x, k)| \leqslant C(1 + |k|)^m$ (应用附录定理 3), 并且有

$$\partial_j a(x, k) = e_{-k}(x)[\partial_j, A]e_k(x)$$
$$\delta_j a(x, k) = e_{-k}(x)(e_{-\varepsilon_j} A e_{\varepsilon_j} - A)(e_k)(x).$$

由此推出:

$$\forall\alpha, \forall\beta, \quad |\partial_x^\alpha \delta^\beta a(x, k)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1 + |k|)^{m-|\beta|}. \tag{*}$$

b) 反之, 设函数 $a = a(x, k)$ 对于 x 是 C^∞ 的且满足条件 $(*)$, 我们定义 $A : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$:

$$Au(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a(x, k)\hat{u}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}. \tag{**}$$

i) 对于满足 $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\psi = \varnothing$ 的 $\varphi, \psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$,证明存在某个 $k \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$ 使得

$$\varphi A\psi u(x) = \int_{\mathbb{T}^n} k(x, y)u(y)\,\mathrm{d}y.$$

ii) 我们用通常的坐标映射把 $U=(\mathbb{T}^1\setminus\{1\})^n$ 和 $(0,2\pi)^n$ 等同起来. 对 $\varphi,\psi\in C_0^\infty(U)$, 验证 $\varphi A\psi\in\Psi^m(U)$. (注意 $\delta^\alpha(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot z})=z^\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot z}q_\alpha(z)$,其中 q_α 是 C^∞ 的,在 U 上非零).

iii) 总结得到的结论.

下面三个习题告诉我们拟微分算子是如何应用到紧流形上的分析问题上去的. 为了更好的展示拟微分算子的作用, 我们决定给出关于有限性,对偶及谱分解的经典结果的自足的证明, 我们用到的唯一一个非平凡的泛函分析的结果是 Hilbert 投影定理 (习题 7.9 e)).

希望了解与这些结果相关的泛函分析一般理论 (Fredholm 算子等等) 的读者可以参阅相关书籍 (例如 Hörmander [H5],第 19.1 节).

在下文中,我们假设有一个紧流形 M 和 M 上一个正密度 μ. 空间 $L^2(M)$ 上有通常的 Hilbert 内积

$$(u,v)=\int_M u\,\overline{v}\,\mu.$$

依惯例, 我们记 $|u|_0^2=(u,u)$. 对于这样定义的范数, $C^\infty(M)$ 是 $L^2(M)$ 的稠密子空间.

7.8* 有限性和对偶

设 M 是一个 n 维紧流形,并设 $P\in\Psi^m(M)$ 是一个椭圆算子. 我们选择 M 上的一个正密度 μ 并在 $C^\infty(M)$ 上引进准 Hilbert 内积

$$(u,v)=\int_M u\,\overline{v}\,\mu.$$

在习题 7.5 中我们证明了对于这个结构 P 有一个共轭算子 P^*, 且 $P^*\in\Psi^m(M)$.

此外, 我们把任何可以写成 $k(x,y)=\sum_{j=1}^N\varphi_j(x)\psi_j(y)$ (其中 $\varphi_j,\psi_j\in C^\infty(M)$) 的函数称作有限秩核函数, 称相应的由公式 $Ku(x)=\int_M k(x,y)\,u(y)\,\mu(y)$ 定义的算子 K 为有限秩算子.

a) 证明若 K 是有限秩的, 则 $\operatorname{Ker}(I-K)$ 是有限维的, 且 $\operatorname{Im}(I-K)=(\operatorname{Ker}(I-K^*))^\perp$.

b) 设 $k\in C^\infty(M\times M)$. 证明对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在有限秩的 k' 使得 $\sup_{M\times M}|k-k'|\leqslant\varepsilon$. (我们可以考虑 Stone–Weierstrass 定理).

由此推出存在 $Q\in\Psi^{-m}(M)$ 使得 $QP=I-K$, 其中 K 具有有限秩核函数.

c) 证明 $\operatorname{Ker}P$ 是有限维的. 设 $f\in(\operatorname{Ker}P^*)^\perp$. 证明 $Qf\in(\operatorname{Ker}(I-K^*))^\perp$, 并推出存在 $g\in C^\infty(M)$ 使得 $f-Pg\in\operatorname{Ker}Q$. 证明我们可以选择 g 使得 $\|f-Pg\|$ 为极小, 且 $h=f-Pg$ 和 $P(\operatorname{Ker}(QP))$ 垂直. 由此推出 $P^*h\in\operatorname{Im}(P^*Q^*)$, 且 $h=0$.

这样我们就可以得到结论:

$$\operatorname{Im} P = (\operatorname{Ker} P^*)^{\perp}.$$

7.9.* 设对某个 $m<0$, $A \in \Psi^m(M)$. 由定理 5.1,

$$A : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

可以延拓成 $L^2(M)$ 上的有界算子, 仍记为 A. 设 A 是自共轭的, 即 $A^* = A$.

a) 设 $F \subset L^2(M)$ 是一个在 A 的作用下稳定的子空间, 且 A 在其上不为 0.

i) 我们记 $s(F) = \sup\limits_{u\in F,\, |u|_0=1} |(Au,\, u)|$. 证明 $s(F) \in (0,\, +\infty)$.

ii) 设有 F 中序列 (u_j) 使得 $|u_j|_0 = 1$, $(Au_j,\, u_j) \to \lambda$,其中 $|\lambda| = s(F)$. 我们记 $\varepsilon = \lambda/s(F) \in \{-1,\, 1\}$.

证明 $|Au_j - \lambda u_j|_0 \to 0$ (对 $Q(v) = ((s(F) - \varepsilon A)\, v,\, v)$ 应用 Schwarz 不等式), 再利用习题 7.8 b), 证明 (u_j) 的一个子列依范数收敛于 $\operatorname{Ker}(A-\lambda) \cap F$ 中的一个非零元素. 同时验证 $\operatorname{Ker}(A-\lambda)$ 包含在 $C^\infty(M)$ 中且是有限维的.

b) 证明存在 $L^2(M)$ 的一列两两正交的有限维非零子空间 (E_k),和一列实数 (λ_k),使得

$$\forall k,\ A|_{E_k} = \lambda_k \mathrm{Id} \text{ 且} |\lambda_{k+1}| = s(F_k),\ \text{其中} F_k = \left(\bigoplus_{j=0}^{k} E_j\right)^{\perp};$$

最后若 $\lambda_k \neq 0$,则 $E_k \subset C^\infty(M)$.

c) 证明 $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 0$. (我们可以利用习题 5.10 a) 和 7.8 b) 来证明 A 是有限秩算子依范数收敛的极限; 由此推出 A 不能在某个无限维子空间上对某个 $c>0$ 满足形如 $|(Au,\, u)| \geqslant c|u|^2$ 的不等式).

d) 证明若 (λ_k) 以 0 为驻点, 则 A 的核函数是有限秩的.

e) 我们记 $E = \bigoplus\limits_{k=0}^{\infty} E_k + \operatorname{Ker} A$. 证明 E 在 $L^2(M)$ 中是稠密的. (研究 $E^{\perp}$).

7.10.* 设 $P \in \Psi^m(M)$ 是 $m>0$ 阶算子,形式自共轭 (即 $P^* = P$),具有满足

$$\forall (x,\, \xi) \in T^*M,\ p_m\,(x,\, \xi) \geqslant c\,|\xi|^m\ (\text{ 其中}\, c>0)$$

的主象征 p_m.

a) 证明存在 $a>0$ 使得 $P+a$ 在 $C^\infty(M)$ 上是单射. (利用 Gårding 不等式). 利用习题 7.8 证明 $P+a : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 是可逆的.

b) 对 $A=(P+a)^{-1}$ 应用习题 7.9 的结论,证明存在 $C^\infty(M)$ 的一列两两正交非零有限维子空间 (E_k),和一列趋向于 $+\infty$ 的实数列 (λ_k),使得

$$L^2(M)=\overline{\bigoplus_k E_k},\ 且\ \forall k,\ P|_{E_k}=\lambda_k \mathrm{Id}.$$

注记. 流形上的密度 对于不熟悉流形上的微积分的读者,我们在这里简单回顾一下密度的概念.

设 E 是 $\mathbb{R}$ 上 n 维向量空间, 我们考虑对于 E 上任何线性算子 A, 和任何向量 $h_1,\cdots,h_n\in E$ 都有

$$\varphi(Ah_1,\cdots,Ah_n)=|\det A|\varphi(h_1,\cdots,h_n) \tag{$*$}$$

的线性映射 $\varphi: E^n\to\mathbb{C}$ 全体,记为 $|\Omega|(E)$. 例如, 若 $(e_1,\cdots,e_n)$ 是 E 的一组基, $\varphi=|e_1^*\wedge\cdots\wedge e_n^*|$ 就是 $|\Omega|(E)$ 的元素,且取值在 $\mathbb{R}^+$ 中. 易见 $|\Omega|(E)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的 1 维线性空间, 而这样一个元素就构成了一组基.

对一个 n 维流形 M, 我们以 $|\Omega|(TM)$ 记所有 $|\Omega|(T_mM)$ $(m\in M)$ 的无交并: $|\Omega|(TM)$ 是 M 上的一个 1 维复向量丛, 我们称之为 M 上的体积元丛. 所谓密度就是这个丛的任意一个 (C^∞) 截面; ρ 的好处在于对它可以在 M 上求积分 (至少当它在无穷远减少得足够快, 特别是当它具有紧支集的时候). 事实上,在一个局部坐标系中,我们有

$$\rho=f(x_1,\cdots,x_n)|\,\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n|,\ 其中 f\in C^\infty,$$

且当 ρ 在一个坐标图中具有紧支集时,我们可以定义

$$\int_M\rho=\int_{\mathbb{R}^n}f(x_1,\cdots x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n,$$

公式 $(*)$ 保证了这个积分和局部坐标系的选择无关. 由单位分解,我们就可以对 M 上任意紧支集的密度 ρ 定义 $\int_M\rho$.

当然, 如果 M 是可定向的,任何密度 ρ 都可以写成 $f|\omega|$ 的形式, 其中 $f\in C^\infty(M)$, 且 ω 是一个处处非零的 n- 形式.

如果 ω 是正的, 那么 $\int_M\rho$ 就是 $\int_{\vec{M}}f\omega$, 其中 $\vec{M}$ 表示具有定向的流形 M.

密度的概念使我们在没有定向假设的情况下也能够在一个流形上做积分. 我们注意到, 利用单位分解, 我们总能够把丛 $|\Omega|(TM)$ 平凡化,即构造一个处处非零的密度 ρ_0: 其他任何密度都可以写成 $f\rho_0$ $(f\in C^\infty(M))$ 的形式. 一般来说,我们都会选择一个正的 ρ_0, 即对于任意的 $m\in M$ 和任意独立的 $h_1,\cdots,h_n\in T_mM$ 我们有 $\rho_0(m)(h_1,\cdots h_n)>0$. (考虑到 $(*)$,这一点是很容易做到的).

II　非线性二进分析　微局部分析能量估计

粗看起来, 讨论拟微分算子这样一个在大自然中几乎无处不在的概念的 “应用” 是一件有些滑稽的事情; 但不管怎么说, 为了避免要求读者直接查阅原始论文或者专著, 我们在这里用一种非常初等的方式很局限地陈述它们的若干应用. 如果说本章的前两节 (II.A 和 II.B) 可以看作是第 I 章中的古典拟微分算子象征演算的自然 (且具有丰富推论的) 延续, II.C 节利用拟微分工具的有效性来证明一些不可或缺的双曲能量估计.

这些估计可以用来得到 Hörmander 关于奇性传播的定理 (微局部分析的关键定理之一); 此外, 它们是第 III 章中将要描述的非线性扰动技巧的核心.

II.A　非线性二进分析

II.A.1　Littlewood–Paley 分解: 一般性质

II.A.1.1　Littlewood–Paley 分解

设 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足当 $|\xi| \leqslant 1/2$ 时 $\psi(\xi)=1$, 当 $|\xi| \geqslant 1$ 时 $\psi(\xi)=0$[①]. 我们记 $\varphi(\xi)=\psi(\xi/2)-\psi(\xi)$: φ 的支集包含在球壳 $1/2 \leqslant |\xi| \leqslant 2$ 之中, 且对任意的 ξ, 我们有

$$1=\psi(\xi)+\sum_{p\geqslant 0}\varphi(2^{-p}\xi)$$

①译校者注: 这里应要求 ψ 的值域为 $[0,1]$.

(在每一点,右端的和式至多有两个加项非零). 对 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 我们定义:

$$u_{-1} = S_0 u = \psi(D)\, u, \quad u_p = \varphi(2^{-p}D)\, u,$$

这样

$$u = S_0 u + \sum_{p \geqslant 0} u_p.$$

这就是 u 的 Littlewood–Paley 分解. 我们记部分和为 $S_p u = \sum_{q=-1}^{p-1} u_q$. 每一项[①]在 $\mathbb{C}^n$ 中都是全纯的 (事实上, 只要 u 在某个 H^s 中, 这些加项就在 $H^{+\infty}$ 中) 且 u 的 "品质" 反应在 $\sum u_p$ 的收敛速度上. 下面两个引理将是被反复引用的. 我们先规定一下记号: $|u|_s$ 表示 u 在 H^s 中的范数 ($s \in \mathbb{R}$), $\|u\|_0$ 是 L^∞ 范数.

引理 1.1.1 (加项的几乎正交性) 我们有

$$1/2 \leqslant \psi^2(\xi) + \sum_{p \geqslant 0} \varphi^2(2^{-p}\xi) \leqslant 1, \tag{1.1.1}$$

且对于任意的 $u \in L^2$,

$$\sum_{p \geqslant -1} |u_p|_0^2 \leqslant |u|_0^2 \leqslant 2 \sum_{p \geqslant -1} |u_p|_0^2. \tag{1.1.2}$$

证明

$$\psi^2(\xi) + \sum \varphi^2(2^{-p}\xi) \leqslant \left[\psi(\xi) + \sum \varphi(2^{-p}\xi)\right]^2 = 1,$$

而根据不等式 $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$,

$$1 = \left[\psi(\xi) + \sum \varphi(2^{-p}\xi)\right]^2 \leqslant 2\left(\psi^2(\xi) + \sum \varphi^2(2^{-p}\xi)\right).$$

因为

$$|u|_0^2 = \text{常数} \cdot \int |\hat{u}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi, \text{②}$$

所以只要在 (1.1.1) 的两边都乘上 $|\hat{u}(\xi)|^2$ 再做积分就可以得到 (1.1.2) 了,注意到根据定义 $\hat{u}_p(\xi) = \varphi(2^{-p}\xi)\hat{u}(\xi)$, 而 $\hat{u}_{-1}(\xi) = \psi(\xi)\hat{u}(\xi)$. □

这一引理的根本在于当 $|p-q| \geqslant 2$ 时 $(u_p, u_q)_{L^2} = 0$: 这些加项 u_p 不是正交的, 但几乎是, 而引理 1.1.1 就是对应于这种几乎正交性的勾股定理.

更一般的, 若 $\{u_p\}$ 是 L^2 中的一列满足 $\operatorname{supp} \hat{u}_p \subset \left\{\xi, \frac{1}{C}2^{p-1} \leqslant |\xi| \leqslant C2^{p+1}\right\}$ 的函数, 我们总有下述不等式:

$$\left|\sum u_p\right|_0^2 \leqslant \text{常数} \cdot \sum |u_p|_0^2. \tag{1.1.2'}$$

①译校者注: 此处应为 "每一项的 Fourier 变换".

②译校者注: 这里的常数 $= (2\pi)^{-n}$.

引理 1.1.2 (加项对于求导运算的敏感性)　存在独立于 p 和 u 的常数 C,满足:

i) 对于任意的 $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $p \geqslant -1$,

$$|\partial^\alpha u_p|_0 \leqslant C\,2^{p|\alpha|}|u|_0\,, \quad |\partial^\alpha S_p u|_0 \leqslant C\,2^{p|\alpha|}|u|_0, \tag{1.1.3}$$

$$\|\partial^\alpha u_p\|_0 \leqslant C\,2^{p|\alpha|}\|u\|_0\,, \quad \|\partial^\alpha S_p u\|_0 \leqslant C\,2^{p|\alpha|}\|u\|_0. \tag{1.1.4}$$

ii) 对任意的 $s \in \mathbb{R}$ 和 $p \geqslant 0$,

$$\frac{1}{C}2^{ps}|u_p|_0 \leqslant |u_p|_s \leqslant C2^{ps}|u_p|_0. \tag{1.1.5}$$

iii) 对任意的 $k \in \mathbb{N}$ 和 $p \geqslant 0$,

$$\frac{1}{C}2^{pk}\|u_p\|_0 \leqslant \sum_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha u_p\|_0 \leqslant C2^{pk}\|u_p\|_0. \tag{1.1.6}$$

证明　a) 由定义

$$|u_p|_s^2 = (2\pi)^{-n}\int (1+|\xi|^2)^s \varphi^2(2^{-p}\xi)|\hat{u}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi;$$

因为 $(1+|\xi|^2)^s$ 在 $\varphi(2^{-p}\xi)$ 的支集上具有形如 "常数 $\times\, 2^{2ps}$" 的上下界,我们立即得到 (1.1.3) 和 (1.1.5).

b) 记 Φ 的 Fourier 逆变换为 $\check{\Phi}$ (即 $\hat{\check{\Phi}} = \Phi$),我们有 $\Phi(D)u = \check{\Phi} * u$, 且若 $\Phi(\xi) = \Phi_1(\mu\xi)$ ($\mu \in \mathbb{R}$; Φ_1 是某个函数),则 $\check{\Phi}(x) = \mu^{-n}\check{\Phi}_1(x/\mu)$, 这样

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\check{\Phi}(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |\check{\Phi}_1(y)|\,\mathrm{d}y,$$

就和 μ 无关. 我们得到 $\|\check{\Phi} * u\|_0 \leqslant C\|u\|_0$, 其中 C 和 μ 无关. 对任意 α, 我们有

$$\partial^\alpha(\Phi(D)u) = (\partial^\alpha\check{\Phi}) * u = \mu^{-|\alpha|}(\mu^{-n}(\partial^\alpha\check{\Phi}_1)(x/\mu)) * u,$$

这样

$$\|\partial^\alpha(\Phi(D)u)\|_0 \leqslant C\mu^{-|\alpha|}\|u\|_0;$$

将此结果应用于 $\Phi(\xi) = \varphi(2^{-p}\xi)$ (该式定义 u_p) 或 $\Phi(\xi) = \psi(2^{-p}\xi)$ (该式定义 $S_p u$), 我们得到 (1.1.4). 类似的,

$$\begin{aligned}\widehat{\partial^\alpha u_p} &= \text{常数}\cdot \xi^\alpha\varphi(2^{-p}\xi)\hat{u}(\xi)\\ &= \text{常数}\cdot 2^{p|\alpha|}(2^{-p}\xi)^\alpha\varphi(2^{-p}\xi)\hat{u}(\xi)\\ &= \text{常数}\cdot 2^{p|\alpha|}\Phi_1(2^{-p}\xi)\hat{u}_p(\xi),\ ^{①}\end{aligned}$$

① 译校者注: 这里的常数 $= \mathrm{i}^{|\alpha|}$. 作者特意不给出具体的数值,是为了着重指出在微局部分析中,系数的取值是无关紧要的.

其中 $\Phi_1(\xi)=\xi^\alpha\chi(\xi)$, $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,且在 φ 的支集的一个邻域里 $\chi=1$. 这样我们就得到 (1.1.6) 右边的不等式.

c) 为了得到 (1.1.6), 我们对于在 $\operatorname{supp}\varphi$ 的一个邻域里取值为 1 的函数 $\chi\in C_0^\infty$, 考虑等式

$$\varphi(\xi)=\left(\sum_{|\alpha|=k}\xi^\alpha\chi_\alpha(\xi)\right)\varphi(\xi),$$

其中

$$\chi_\alpha(\xi)=\frac{\xi^\alpha\chi(\xi)}{\sum_{|\alpha|=k}(\xi^\alpha)^2}\in C_0^\infty,$$

我们可以得到

$$\begin{aligned}\hat{u}_p(\xi)=\varphi(2^{-p}\xi)\hat{u}(\xi)&=\sum_{|\alpha|=k}(2^{-p}\xi)^\alpha\chi_\alpha(2^{-p}\xi)\hat{u}_p(\xi)\\&=2^{-pk}\sum_{|\alpha|=k}\chi_\alpha(2^{-p}\xi)\widehat{D^\alpha u_p}(\xi),\end{aligned}$$

这样 $2^{pk}u_p=\sum\limits_{|\alpha|=k}(2^{pn}\check{\chi}_\alpha(2^p\cdot))*D^\alpha u_p$,即可得到结论. □

II.A.1.2　Sobolev 空间的刻画

性质 1.2　i) 若 $u\in H^s(\mathbb{R}^n)$,则对任意的 $p\geqslant -1$,

$$|u_p|_0\leqslant \text{常数}\cdot|u|_s c_p 2^{-ps},$$

其中 $c_p=c_p(u)$ 满足 $\sum c_p^2\leqslant 1$.

ii) 反之, 若对于 $p\geqslant -1$ 有 $|u_p|_0\leqslant Cc_p2^{-ps}$, 其中 $\sum c_p^2\leqslant 1$,则 $u\in H^s$ 且存在和 u 无关的常数 C' 使得 $|u|_s\leqslant CC'$.

证明　因为 $(\langle D\rangle^s u)_p=\langle D\rangle^s u_p$[①], 这就是 (1.1.5) 和引理 1.1.1 中给出的 L^2 空间的刻画的直接推论. □

II.A.1.3　Hölder 空间的刻画

对 $\alpha>0$, $\alpha\notin\mathbb{N}$,我们定义 $C^\alpha=C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 为 $C^k(\mathbb{R}^n)$ ($k=E(\alpha)=\alpha$的整数部分) 中满足下述条件的函数 u 的全体: u 及其直到 k 阶的导数都是有界的, 且 $\exists C$, $\forall x$, $\forall y$, $\forall\beta$, $|\beta|=k$:

$$|\partial^\beta u(x)-\partial^\beta u(y)|\leqslant C|x-y|^{\alpha-k}. \tag{1.3.1}$$

C^α 上的范数为 $\|u\|_\alpha=\|u\|_0+\|u\|'_\alpha$, 其中 $\|u\|'_\alpha$ 是 (1.3.1) 中的最优常数.

[①] 译校者注: 这里, $\langle D\rangle^s=(1+|D|^2)^{s/2}$.

性质 1.3 i) 若 $u \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ $(\alpha \notin \mathbb{N})$, 则对任意的 $p \geqslant -1$,

$$\|u_p\|_0 \leqslant \text{常数} \cdot \|u\|_\alpha 2^{-p\alpha}.$$

ii) 反之, 若对于 $p \geqslant -1$, $\|u_p\|_0 \leqslant C2^{-p\alpha}$ $(\alpha \notin \mathbb{N})$, 则 $u \in C^\alpha$ 且存在与 u 无关的常数 C' 使得 $\|u\|_\alpha \leqslant CC'$.

证明 我们首先注意到根据不等式 (1.1.6) 和等式 $(\partial^\alpha u)_p = \partial^\alpha u_p$, 我们只需要讨论 $0 < \alpha < 1$ 的情形就可以了.

a) 因为 $\|u_{-1}\|_0 \leqslant \text{常数} \cdot \|u\|_0$, 我们只须对 $p \geqslant 0$ 考虑

$$u_p(x) = \int 2^{pn}\check{\varphi}(2^p(x-y))\,u(y)\,\mathrm{d}y.$$

同时因为 $\int \check{\varphi}(z)\,\mathrm{d}z = \text{常数} \cdot \varphi(0) = 0$, 所以

$$u_p(x) = \int 2^{pn}\check{\varphi}(2^p(x-y))(u(y)-u(x))\,\mathrm{d}y,$$

因此

$$|u_p(x)| \leqslant \|u\|_\alpha \int 2^{pn}|\check{\varphi}|(2^p(x-y))|x-y|^\alpha\,\mathrm{d}y \leqslant \text{常数} \cdot \|u\|_\alpha 2^{-p\alpha}.$$

由此 i) 得证.

b) 反之, 对于某个适当的 p, 记

$$u = S_p u + R_p u, \quad R_p u = \sum_{q \geqslant p} u_q;$$

我们有

$$\|R_p u\|_0 \leqslant \sum_{q \geqslant p} \|u_p\|_0 \leqslant C2^{-p\alpha}.$$

而且,

$$|S_p u(x) - S_p u(y)| \leqslant |x-y| \sum_{q=-1}^{p-1} \|\nabla u_q\|_0;$$

根据 (1.1.6),我们有

$$\|\nabla u_q\|_0 \leqslant \text{常数} \cdot C2^{q(1-\alpha)},$$

而且显然有 $\|\nabla u_{-1}\|_0 \leqslant \text{常数} \cdot C$; 这样, 对于 $0 < \alpha < 1$,

$$|S_p u(x) - S_p u(y)| \leqslant \text{常数} \cdot C|x-y|2^{p(1-\alpha)},$$

因为级数 $\sum \|\nabla u_q\|_0$ 的各项被一个几何级数所控制.

把对于 $R_p u$ 和 $S_p u$ 的估计放在一起, 我们得到

$$|u(x) - u(y)| \leqslant \text{常数} \cdot C|x-y|2^{p(1-\alpha)} + 2C2^{-p\alpha}.$$

我们取 p 为满足 $2^p \leqslant \dfrac{1}{|x-y|}$ 的最大整数, 可以得到

$$|u(x)-u(y)| \leqslant 常数 \cdot C|x-y|^{\alpha}.$$

由此 ii) 得证.

我们必须提醒读者, $\|u_p\|_0 \leqslant C$ 并不能刻画 L^∞, $\|u_p\|_0 \leqslant C2^{-p}$ 也不能刻画 (古典意义下的)C^1, 而会给出一个更大的空间 (参见习题 A.3).

II.A.1.4 Sobolev 嵌入

性质 1.4 对 $s > n/2$, $s - n/2 \notin \mathbb{N}$, $H^s \subset C^{s-n/2}$ (连续嵌入).

证明 我们记 $u_p(x) = (2\pi)^{-n}\displaystyle\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\hat{u}_p(\xi)\,\mathrm{d}\xi$,可以得到

$$\begin{aligned}\|u_p\|_0 &\leqslant 常数 \cdot \int_{|\xi|\leqslant C2^p} |\hat{u}_p(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \\ &\leqslant 常数 \cdot |\hat{u}_p|_0[B(0,\, C2^p)的体积]^{1/2} \\ &\leqslant 常数 \cdot 2^{pn/2}|u|_s c_p 2^{-ps},\end{aligned}$$

其中最后一步利用了 (Fourier 变换的 L^2 等距性质和) 性质 1.2.

由性质 1.2,$c_p \leqslant 1$,这样就可以利用性质 1.3 得到结论了.

II.A.1.5 凸性不等式

性质 1.5 i) 对于 $s = \lambda s_0 + (1-\lambda)s_1$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ s_0 < s_1,\ s_0,\ s_1 \in \mathbb{R})$ 和任意 $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,我们有不等式

$$|u|_s \leqslant 常数 \cdot |u|_{s_0}^{\lambda}|u|_{s_1}^{1-\lambda}. \tag{1.5.1}$$

ii) 对于 $\alpha = \lambda\alpha_0 + (1-\lambda)\alpha_1$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ \alpha_0 < \alpha_1,\ \alpha_0, \alpha_1$ 正的非整数) 和任意 $u \in C^{\alpha_1}$,我们有

$$\|u\|_\alpha \leqslant 常数 \cdot \|u\|_{\alpha_0}^{\lambda}\|u\|_{\alpha_1}^{1-\lambda}. \tag{1.5.2}$$

证明 a) $$\begin{aligned}|u|_s^2 &= \int (1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int (1+|\xi|^2)^{\lambda s_0}|\hat{u}(\xi)|^{2\lambda}(1+|\xi|^2)^{(1-\lambda)s_1}|\hat{u}(\xi)|^{2(1-\lambda)}\,\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

然后以 $p = 1/\lambda$ 和 $q = 1/(1-\lambda)$ 为参数应用 Hölder 不等式即可.

b) 我们记:

$$\begin{aligned}\|u_p\|_0 \leqslant \|u_p\|_0^{\lambda}\|u_p\|_0^{1-\lambda} &\leqslant 常数 \cdot \|u\|_{\alpha_0}^{\lambda}(2^{-p\alpha_0})^{\lambda}\|u\|_{\alpha_1}^{1-\lambda}(2^{-p\alpha_1})^{1-\lambda} \\ &\leqslant 常数 \cdot \|u\|_{\alpha_0}^{\lambda}\|u\|_{\alpha_1}^{1-\lambda}2^{-p\alpha},\end{aligned}$$

然后由性质 1.3 即可得到结论. □

注 一个有用的事实是: (1.5.2) 对于 $\alpha_0, \alpha_1 \geqslant 0$ 还是成立的, 这里当 $\alpha = 0$ 时我们定义 C^α 为 L^∞, 而当 α 是正整数时我们定义 C^α 为阶数 $\leqslant \alpha - 1$ 的 Lipschitz 函数全体. (参见第 I 章, 习题 2.4.a)).

这里我们可以很容易地看到性质 1.3 中给出的刻画是如何起作用的: 它包含了大量关于 Hölder 空间的有用性质 (例如 (1.5.2)).

II.A.1.6 光滑化算子

性质 1.6 存在一族算子 $S_\theta(\theta \geqslant 1) : \bigcup\limits_{\alpha\geqslant 0} C^\alpha \to \bigcap\limits_{\beta\geqslant 0} C^\beta$ 具有下述性质:

i) $\|S_\theta u\|_\alpha \leqslant$ 常数 $\cdot \|u\|_\beta$, $\alpha \leqslant \beta$,

ii) $\|S_\theta u\|_\alpha \leqslant$ 常数 $\cdot\, \theta^{\alpha-\beta}\|u\|_\beta$, $\alpha \geqslant \beta$,

iii) $\|S_\theta u - u\|_\alpha \leqslant$ 常数 $\cdot\, \theta^{\alpha-\beta}\|u\|_\beta$, $\alpha \leqslant \beta$,

iv) $\left\|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} S_\theta u\right\|_\alpha \leqslant$ 常数 $\cdot\, \theta^{\alpha-\beta-1}\|u\|_\beta$, $\forall\alpha, \beta$.

当 α 或 β 为整数时, 我们约定 C^α 为由性质 1.3 刻画的空间, 且具有相应范数.

证明 对于在原点的一个邻域内取值为 1 的函数 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, 我们记

$$S_\theta u = \sum_p \chi(2^p/\theta) u_p;$$

这样我们知道若 $2^p \geqslant$ 常数 $\cdot\, \theta$, 则有 $(S_\theta u)_p = 0$, 否则 $\|(S_\theta u)_p\|_0 \leqslant$ 常数 $\cdot \|u\|_\beta 2^{-p\beta}$.

特别地, 当 $\alpha \geqslant \beta$ 时, 有

$$\|(S_\theta u)_p\|_0 \leqslant \text{常数} \cdot 2^{-p\alpha} 2^{p(\alpha-\beta)} \|u\|_\beta,$$

(由性质 1.3) 即得到 ii).

因为 $S_\theta u - u = \sum(\chi(2^p/\theta) - 1)u_p$, 所以若 $2^p \leqslant$ 常数 $\cdot\, \theta$, 则有 $(S_\theta u - u)_p = 0$, 否则 $\|(S_\theta u - u)_p\|_0 \leqslant$ 常数 $\cdot \|u\|_\beta 2^{-p\beta}$; 这样由等式

$$\|(S_\theta u - u)_p\|_0 \leqslant \text{常数} \cdot \|u\|_\beta 2^{-p\alpha} 2^{p(\alpha-\beta)}$$

即可得到 iii).

最后, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} S_\theta u = \dfrac{1}{\theta}\sum \chi_1(2^p/\theta) u_p$, 其中 $\chi_1(z) = -z\chi'(z)$. 这样只需注意到在 χ_1 的支集上, 常数 $\cdot\, \theta \leqslant 2^p \leqslant$ 常数 $\cdot\, \theta$, 就可以根据上面的思路证明 iv) 了. □

II.A.2 在函数的乘积与复合上的应用

II.A.2.1 对两个函数乘积的估计

性质 2.1.1 i) 若 $u, v \in C^\alpha$ $(\alpha \notin \mathbb{N})$, 则

$$\|uv\|_\alpha \leqslant \text{常数} \cdot (\|u\|_0 \|v\|_\alpha + \|u\|_\alpha \|v\|_0). \tag{2.1.1}$$

ii) 若 $u, v \in L^\infty \cap H^s$ $(s>0)$,则 uv 也在此空间中, 且

$$|uv|_s \leqslant 常数 \cdot (\|u\|_0 |v|_s + |u|_s \|v\|_0). \tag{2.1.2}$$

证明 我们有

$$u = \sum_p u_p, \quad v = \sum_q v_q,$$

和

$$uv = \sum_{p,q} u_p v_q = \sum_q (S_q u) v_q + \sum_p u_p S_{p+1} v = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Σ_1 和 Σ_2 的谱 (就是他们的 Fourier 变换的支集) 在球 $\{|\xi| \leqslant 常数 \cdot 2^p\}$ 的内部. 我们将应用下述引理.

引理 2.1 设 $(a_q)_{q\geqslant -1}$ 是一列满足

$$\operatorname{supp} \hat{a}_q \subset \{\xi, |\xi| \leqslant 常数 \cdot 2^q\}$$

的函数. 假设存在对于某个 $\alpha > 0$ 我们有 $\|a_q\|_0 \leqslant C2^{-q\alpha}$ (或者对某个 $s>0$ 我们有 $|a_q|_0 \leqslant Cc_q 2^{-qs}$, 其中 $\sum c_q^2 \leqslant 1$).

那么 $u = \sum_{q\geqslant -1} a_q$ 是 C^α 中的元素 (或者 $u \in H^s$), 且 $\|u\|_\alpha \leqslant 常数 \cdot C$ (或者 $|u|_s \leqslant 常数 \cdot C$).

证明 我们只须注意到存在 N 使得 u 的二进分量 u_p 满足 $u_p = \sum_{q\geqslant p-N} (a_q)_p$, 这样如果用 $|\ |$ 来表示 L^2 或者 L^∞ 范数, 根据引理 1.1.2.i),我们就有

$$|u_p| \leqslant \sum_{q\geqslant p-N} |(a_q)_p| \leqslant 常数 \cdot \sum_{q\geqslant p-N} |a_q|.$$

在 L^∞ 的情形, 我们得到

$$\|u_p\|_0 \leqslant 常数 \cdot C \sum_{q\geqslant p-N} 2^{-q\alpha} \leqslant 常数 \cdot C2^{-p\alpha}.$$

在 L^2 的情形, 将 Cauchy–Schwarz 不等式应用于 $c_q 2^{-(q-p)s/2} \times 2^{-(q+p)s/2}$,就有

$$|u_p|_0 \leqslant 常数 \cdot C \sum_{q\geqslant p-N} c_q 2^{-qs} \leqslant 常数 \cdot C2^{-ps} \left(\sum_{q\geqslant p-N} c_q^2 2^{-(q-p)s} \right)^{1/2},$$

最后注意到

$$\sum_p \sum_{q\geqslant p-N} c_q^2 2^{-(q-p)s} \leqslant 常数$$

即可得到结论. □

我们注意到，我们所用的分解的几何特征在这里起到了关键的作用.

根据这个引理，我们只须估算 $\|(S_q u)v_q\|_0$. 但由

$$\|(S_q u)v_q\|_0 \leqslant \|S_q u\|_0 \|v_q\|_0 \leqslant 常数 \cdot \|u\|_0 \|v\|_\alpha 2^{-q\alpha}$$

可以得到 $\|\Sigma_1\|_\alpha \leqslant 常数 \cdot \|u\|_0\|v\|_\alpha$，相应地交换 u 和 v 就可以得到关于 Σ_2 的估计.

为证明 ii)，首先我们有

$$|(S_q u)v_q|_0 \leqslant \|S_q u\|_0 |v_q|_0 \leqslant 常数 \cdot \|u\|_0 |v|_s c_q 2^{-qs},$$

这样 $|\Sigma_1|_s \leqslant 常数 \cdot \|u\|_0|v|_s$，对 Σ_2 我们也有类似结论.

如果在上面的证明中，我们把 $uv = \sum\limits_{p,\,q} u_p v_q = \Sigma_1 + \Sigma_2$ 换成更为精细的

$$\begin{aligned} uv &= \sum_{p\leqslant q-3} u_p v_q + \sum_{q\leqslant p-3} u_p v_q + \sum_{|p-q|\leqslant 2} u_p v_q \\ &= \sum (S_{q-2}u)v_q + \sum (S_{p-2}v)u_p + \sum_{|p-q|\leqslant 2} u_p v_q = \Sigma_1' + \Sigma_2' + \Sigma_3', \end{aligned}$$

那么 Σ_1' 和 Σ_2' 的谱就包含在球壳 (而不仅仅是球) 里；例如，对于 Σ_1'：

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec} S_{q-2}u &\subset \{\xi,\, |\xi| \leqslant 2^{q-2}\}, \\ \operatorname{Spec} v_q &\subset \left\{\xi,\, \frac{1}{2}2^q \leqslant |\xi| \leqslant 2\cdot 2^q\right\}, \end{aligned}$$

这样

$$\operatorname{Spec} (S_{q-2}u)v_q \subset 谱集的和 \subset \left\{\xi,\, 2^{q-2} \leqslant |\xi| \leqslant 9\cdot 2^{q-2}\right\}.$$

而且，当 u 和 v 足够光滑的时候 u_p 和 v_q 都会很小，所以以形如 $u_p v_q$ 为加项的最后一个合式也很小，这就意味着我们有一个比 u 或 v 更加光滑的 “误差项”.

这种处理方式是 J.-M. Bony 引进**仿积**概念的出发点. u 和 v 的 (非对称) 仿积定义为 $T_u v = \sum (S_{q-2}u)v_q$ (参见习题 A.5)；我们于是有 $uv = T_u v + T_v u +$ 性质更好的余项. 这个概念与相应的**仿微分算子**的概念在非线性方程解的奇性的研究中被证实是非常有用的 (参见 Bony [B1]).

我们注意到对于 $\alpha \in \mathbb{N}$，利用第 II.A.1.5 节中的注，性质的第 i) 部分是初等的. 该性质给的一个在各种应用中很常见的变体如下.

性质 2.1.2 若 $u, v \in L^\infty \cap H^s$ (其中整数 $s > 0$)，则对任意满足 $|\alpha| + |\beta| = s$ 的 α, β，我们有：

$$|(\partial^\alpha u)(\partial^\beta v)|_0 \leqslant 常数 \cdot (\|u\|_0 |v|_s + |u|_s \|v\|_0). \tag{2.1.3}$$

证明 当 $|\alpha|=0$ 或 $|\beta|=0$ 时性质是自明的. 在其他情况下 (例如, $|\alpha|\geqslant 1$), 我们有

$$\partial^\alpha u\partial^\beta v=\sum_j *\,\partial_{ij}(\partial^{\alpha_j}u\partial^{\beta_j}v)+*u\partial^{\alpha+\beta}v,$$

其中 $|\alpha_j|+|\beta_j|=s-1$, 而 $*$ 表示各种在此处无足轻重的系数.

为证明 (2.1.3), 只需证明

$$|\partial^{\alpha_j}u\partial^{\beta_j}v|_0\leqslant 常数\cdot(\|u\|_0|v|_s+|u|_s\|v\|_0).$$

我们用证明性质 2.1.1 时用过的处理方法:

$$\partial^{\alpha_j}u\partial^{\beta_j}v=\sum(S_q\partial^{\alpha_j}u)(\partial^{\beta_j}v)_q+\sum(\partial^{\alpha_j}u)_p(S_{p+1}\partial^{\beta_j}v)=\Sigma_1+\Sigma_2,$$

现在我们有 (利用引理 1.1.2.iii)):

$$\begin{aligned}|S_q(\partial^{\alpha_j}u)(\partial^{\beta_j}v)_q|_0&\leqslant\|S_q\partial^{\alpha_j}u\|_0|(\partial^{\beta_j}v)_q|_0\\&\leqslant 常数\cdot\|u\|_0 2^{q|\alpha_j|}|v|_s c_q 2^{-q(s-|\beta_j|)}\\&\leqslant 常数\cdot\|u\|_0|v|_s 2^{-q}c_q,\end{aligned}$$

由此得证. □

我们指出 (2.1.3) 在 Hölder 空间上的类似结论是 II.A.1.5 节中的凸性不等式的简单推论.

事实上, 证明 (2.1.3) 的传统方法是利用下述 (所谓 Gagliardo–Nirenberg) 不等式 (参见 [Au]): 若 $u\in L^\infty\cap H^s$ (整数 $s>0$), 则对于任意的 α, $0\leqslant|\alpha|\leqslant s$, 和 $p=2s/|\alpha|$,

$$|\partial^\alpha u|_{L^p}\leqslant 常数\cdot\|u\|_0^{1-|\alpha|/s}|u|_s^{|\alpha|/s}.$$

在承认这个不等式的前提下,我们利用 Hölder 不等式 ($p=2s/|\alpha|$, $q=2s/|\beta|$) 可以得到

$$\begin{aligned}|(\partial^\alpha u)(\partial^\beta v)|_0&\leqslant|\partial^\alpha u|_{L^p}|\partial^\beta v|_{L^q}\\&\leqslant 常数\cdot(\|u\|_0|v|_s)^{1-|\alpha|/s}(|u|_s\|v\|_0)^{|\alpha|/s}\\&\leqslant 常数\cdot(\|u\|_0|v|_s+|u|_s\|v\|_0).\end{aligned}$$

最后一步利用了指数函数的凸性不等式 $a^\mu b^{1-\mu}\leqslant\mu a+(1-\mu)b$ (其证明和 C^α 的情形是完全一样的).

II.A.2.2 对复合函数的估计

性质 2.2 设 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是一个满足 $F(0)=0$ 的 C^∞ 函数. 若 $u\in L^\infty\cap H^s$ ($s>0$), 则 $F(u)\in L^\infty\cap H^s$ 且 $|F(u)|_s\leqslant C|u|_s$, 其中 C 只和 F 与 $\|u\|_0$ 有关.

这一性质的证明用到下述引理.

引理 2.2 (Meyer 乘子) 设 $\delta \in \mathbb{R}$, 而函数列 $m_p \in C^\infty$ 满足对于所有的 $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha m_p\|_0 \leqslant C_k 2^{p(k+\delta)}.$$

则映射 $M: u \mapsto \sum m_p u_p = Mu$ 对于任意的 $s > \delta$ 将 H^s 映到 $H^{s-\delta}$ 中, 且算子范数只和满足 $k \leqslant E(s-\delta)+1$ 的那些 C_k 有关.

证明 因为 u_p 的谱包含在球壳 $\{\xi, 1/2 \leqslant 2^{-p}|\xi| \leqslant 2\}$ 内, 我们可以选择一个 $C > 4$ 来对 m_p 作如下分解:

$$\hat{m}_p = \psi(2^{-p}\xi/C)\hat{m}_p + \sum_{k\geqslant 0} \varphi(2^{-k}2^{-p}\xi/C)\hat{m}_p = \hat{m}_{p,-1} + \sum_{k\geqslant 0} \hat{m}_{p,k}.$$

这样对 $k \geqslant -1$ 我们定义 $M_k u = \sum m_{p,k} u_p$.

$M_{-1}u$ 的各项的谱都包含在相应的球 $\{\xi, |\xi| \leqslant (C+2)2^p\}$ 之内且 $|m_{p,-1}u_p|_0 \leqslant$ 常数 $\cdot |m_{p,-1}|_0 c_p |u|_s 2^{-ps}$. 根据引理 1.1.2.i), 我们有

$$\|m_{p,-1}\|_0 \leqslant \text{常数} \cdot \|m_p\|_0 \leqslant \text{常数} \cdot 2^{p\delta} C_0,$$

这样由引理 2.1 就可以得到, 当 $s > \delta$ 时 $M_{-1}u \in H^{s-\delta}$.

$M_k u$ $(k \geqslant 0)$ 的各项的谱在球壳

$$\left\{\xi,\, 2^{p+1}\left(\frac{C}{4}2^k - 1\right) \leqslant |\xi| \leqslant 2^{p+1}(1 + C2^k)\right\}$$

之内, 且

$$|m_{p,k}u_p|_0 \leqslant \text{常数} \cdot \|m_{p,k}\|_0 c_p |u|_s 2^{-ps}.$$

而根据引理 1.1.2. i) 和 iii),

$$\begin{aligned}\|m_{p,k}\|_0 &\leqslant \text{常数} \cdot \sum_{|\alpha|=l} \|\partial^\alpha m_{p,k}\|_0 2^{-(p+k)l} \\ &\leqslant \text{常数} \cdot C_l 2^{-kl} 2^{p\delta},\end{aligned}$$

这样对于任意的 $l \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}|m_{p,k}u_p|_0 &\leqslant \text{常数} \cdot C_l |u|_s 2^{-kl} c_p 2^{-p(s-\delta)} \\ &\leqslant \text{常数} \cdot C_l |u|_s 2^{k(s-l-\delta)} c_p 2^{-(p+k)(s-\delta)}.\end{aligned}$$

于是根据引理 1.1.1 最后的注以及 (1.1.2′), 我们得到 $M_k u \in H^{s-\delta}$, 其中 $|M_k u|_{s-\delta} \leqslant$ 常数 $\cdot C_l 2^{k(s-l-\delta)}|u|_s$. 最后, 取 $l > s-\delta$, $M = \sum_{k\geqslant -1} M_k$ 在从 H^s 到 $H^{s-\delta}$ 的连续算子空间中依范数收敛, 且 $\|M\| \leqslant$ 常数 $\cdot (C_0 + C_l)$. □

这样的 "Meyer 乘子" 的一个典型的例子是对于某个 $a \in L^\infty$ 取 $m_p = S_p a$(根据引理 1.1.2,这里 $\delta = 0$). 当然, 在此情况下, m_p 的谱在球 $\{\xi, |\xi| \leqslant C2^p\}$ 内, 一般情况当然并非如此; 但是,引理 2.2 的证明恰恰告诉我们从本质上说可以把所有的情形都简化到上述情形.

我们也提醒读者注意习题 A.7,当 M 是一个 δ 阶拟微分算子,且其象征 $m(x, \xi) = \sum m_p(x)\varphi(2^{-p}\xi)$ 不满足标准估计时: 它作为 H^s 到 $H^{s-\delta}$ 就不是如此显而易见的,这时条件 $s > \delta$ 就变得至为关键.

性质 2.2 的证明 我们采用的方法有一个特别的名字,叫做 "望远镜级数法",首先写下等式

$$F(u) = F(S_0 u) + F(S_1 u) - F(S_0 u) + \cdots + F(S_{p+1} u) - F(S_p u) + \cdots$$

然后定义

$$F(S_{p+1}u) - F(S_p u) = m_p u_p, \text{其中 } m_p = \int_0^1 F'(S_p u + t u_p)\,\mathrm{d}t.$$

a) 若 $u \in L^\infty \cap L^2$, 则对于任意的 α, $\partial^\alpha(F(S_0 u)) \in L^\infty \cap L^2$: 事实上

$$\partial^\alpha(F(S_0 u)) = \sum * F^{(q)}(S_0 u)(\partial^{\gamma_1} S_0 u) \cdots (\partial^{\gamma_q} S_0 u),$$

其中 γ_j 是重指标, $\gamma_1 + \cdots + \gamma_q = \alpha$, $1 \leqslant q \leqslant |\alpha|$, $|\gamma_j| \geqslant 1$. 每一个形如 $\partial^\gamma S_0 u$ 的项都在 $L^2 \cap L^\infty$ 中, 且 $\|\partial^\gamma S_0 u\|_0 \leqslant$ 常数 $\cdot \|u\|_0$, $|\partial^\gamma S_0 u|_0 \leqslant$ 常数 $\cdot |u|_0$, 这样当 $|\alpha| \geqslant 1$ 时我们就证明了结论. 当 $|\alpha| = 0$ 时, $|F(S_0 u)(x)| \leqslant C|S_0 u(x)|$ (其中 C 只和 $\|u\|_0$ 有关), 于是 $|F(S_0 u)|_0 \leqslant C$常数 $\cdot |u|_0$.

b) 现在我们来验证 m_p 是一个 $\delta = 0$ 阶的 "Meyer 乘子". 其实只要考虑 $\tilde{m}_p = G(S_p u)$. 和 a) 中一样,我们有

$$\partial^\alpha G(S_p u) = \sum * G^{(q)}(S_p u)(\partial^{\gamma_1} S_p u) \cdots (\partial^{\gamma_q} S_p u),$$

且根据引理 1.1.2, $\|\partial^\gamma S_p u\|_0 \leqslant$ 常数 $\cdot \|u\|_0 2^{p|\gamma|}$. 这样

$$\|\partial^\alpha G(S_p u)\|_0 \leqslant \text{常数} \cdot 2^{p(|\gamma_1| + \cdots + |\gamma_q|)} = \text{常数} \cdot 2^{p|\alpha|},$$

其中常数只和 G, α 与 $\|u\|_0$ 有关, 证毕. □

在这里,我们还是建议读者参阅 J.-M. Bony 的工作,他给出了一个**仿线性化**操作, 可以让性质 2.2 变得显而易见: 对 $u \in H^s$, $s > n/2$, $F(u) = T_{F'(u)}u + R(u)$, 其中 T 是 II.A.2.1 节中定义的仿积 (参见习题 A.5), 而 $R(u) \in H^{2s-n/2} \not\subset H^s$. 换句话说, 对 $F(u)$ 的估计是 "对 u 线性的",因为在差一个余项的意义下 $F(u)$ 就是 $T_{F'(u)}u$. ①

①译校者注: 关于仿微分算子的有关结论可以参阅中文文献 [CLQ].

II.B 微局部分析: 波前集与拟微分算子

II.B.1 分布的波前集

II.B.1.1 波前集的定义

函数 $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的 Fourier 变换 $\hat{u}(\xi)$ 对于 ξ 是速降的,也就是说:

$$\forall k,\ |\hat{u}(\xi)| \leqslant C_k(1+|\xi|)^{-k}. \tag{1.1.1}$$

反之, 若分布 $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ 的 Fourier 变换满足 (1.1.1), 则根据 Fourier 逆变换公式, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

定义 1.1.1 设 $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 我们定义一个集合 $\Sigma(u) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 如下: 它的补集是 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 中所有具有一个 (锥形) 邻域使得 $\hat{u}$ 在其中满足 (1.1.1) 的方向 ξ 全体. 所谓 "锥形", 是指一个满足:

$$\xi \in \Gamma,\ \lambda > 0 \Rightarrow \lambda\xi \in \Gamma$$

的集合 Γ. 正如 $\operatorname{sing\,supp} u = \complement\{x,\ u \text{ 在 } x \text{ 是 } C^\infty \text{ 的}\}$ 是 u 的 "性质较差的点" 的集合一样, $\Sigma(u)$ 是 u 的 "性质较差的谱方向"(或者说 u 的 "性质较差的频率") 的集合.

我们用下述引理把这两部分信息整合在波前集 $WF(u)$ 这个概念之中.

引理 1.1.1 若 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且 $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 则 $\Sigma(\varphi u) \subset \Sigma(u)$.

证明 我们有 $\widehat{\varphi u}(\xi) = (2\pi)^{-n}\int \hat{\varphi}(\eta)\hat{u}(\xi-\eta)\,\mathrm{d}\eta$. 因为 $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 所以存在某个 M 使得 $|\hat{u}(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^M$; 而在另一方面 $\hat{\varphi}$ 满足 (1.1.1). 取 $\xi_0 \notin \Sigma(u)$: 在 ξ_0 的一个锥状邻域 Γ 中, $\hat{u}$ 满足 (1.1.1); 我们将上述积分分成 $\int_{|\eta|\leqslant c|\xi|}$ 和 $\int_{|\eta|\geqslant c|\xi|}$ 两部分, 使得对于 ξ_0 的一个邻域 Γ_1 中的任意 ξ, 在第一个积分中我们有 $\xi - \eta \in \Gamma$ (当我们把 $0 < c < 1$ 取得足够小的时候这是可以做到的). 我们有

$$\left|\int_{|\eta|\leqslant c|\xi|}\right| \leqslant c_k(1+|\xi|)^{-k}(1-c)^{-k}|\hat{\varphi}|_{L_1},$$

因为由 $|\eta| \leqslant c|\xi|$ 可以推导出 $|\xi-\eta| \geqslant (1-c)|\xi|$. 在另一方面,因为 $|\xi-\eta| \leqslant (\frac{1}{c}+1)|\eta|$,所以

$$\begin{aligned}\left|\int_{|\eta|\geqslant c|\xi|}\right| &\leqslant C\int |\hat{\varphi}(\eta)|(1+|\eta|)^{k+M}(1+|\xi-\eta|)^M\frac{\mathrm{d}\eta}{(1+|\eta|)^{k+M}}\\ &\leqslant C\int |\hat{\varphi}(\eta)|(1+|\eta|)^{k+M}\frac{(1+(1+1/c)|\eta|)^M}{(1+|\eta|)^M}\,\mathrm{d}\eta\frac{1}{(1+c|\xi|)^k}\\ &\leqslant \frac{C(1+1/c)^M}{c^k}(1+|\xi|)^{-k}\int |\hat{\varphi}(\eta)|(1+|\eta|)^{k+M}\,\mathrm{d}\eta.\end{aligned}$$

于是估计

$$|(1+|\xi|)^k \widehat{\varphi u}(\xi)| \leqslant \text{依赖于 } k \text{ 的常数} \cdot \int |\hat{\varphi}(\eta)|(1+|\eta|)^{k+M} \mathrm{d}\eta \tag{1.1.2}$$

就证明了引理, 并同时精确给出与 φ 的关联. □

这样, 对于 $\mathbb{R}^n$ 上的一个开集 X 和 $u \in \mathcal{D}'(X)$, 我们可以称 $\Sigma_x(u) = \bigcap_{\varphi} \Sigma(\varphi u)$ 为 u 在 x 上的性质较差的谱方向的集合, 其中 φ 取遍集合 $\{\varphi \in C_0^\infty(X), \varphi(x) \neq 0\}$ 的所有元素.

定义 1.1.2 设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 中开集, $u \in \mathcal{D}'(X)$.

$$WF(u) = \{(x, \xi) \in X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \xi \in \Sigma_x(u)\}$$

定义了 $X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ 的一个锥形子集,称作 u 的波前集.

下述性质表明, $WF(u)$ 是 u 在 $\operatorname{sing\,supp} u$ 的性质较差的谱方向的集合: 这就是第 I.1 节中我们提到过的综合过程.

性质 1.1.2 $WF(u)$ 在 X 上的投影是 $\operatorname{sing\,supp} u$.

证明 事实上, 若 $x_0 \notin \operatorname{sing\,supp} u$,则由定义 $\Sigma_{x_0}(u) = \varnothing$. 反之, 设对于某个 x_0, $\Sigma_{x_0}(u) = \varnothing$: 那么对于任意方向 $\xi \in S^{n-1}$, 存在 $\varphi_\xi \in C_0^\infty(X)$, $\varphi_\xi(x_0) \neq 0$,使得 $\widehat{\varphi_\xi u}$ 在 ξ 的一个锥形邻域 V_ξ 上是速降的. 由 S^{n-1} 的紧性, 我们可以得到有限个函数 $\varphi_i(x) = \varphi_{\xi_i}(x)$, 满足对于任意的 $i, V_{\xi_i} \cap \Sigma(\varphi_i u) = \varnothing$: 引理 1.1.1 于是推出 $\Sigma\left(\left(\prod_i \varphi_i\right) u\right) = \varnothing$, 即 $\left(\prod_i \varphi_i\right) u \in C_0^\infty$, 即得 $x_0 \notin \operatorname{sing\,supp} u$. □

II.B.1.2 例. Fourier 分布的情形

例 1.2.1 考虑原点处的 Dirac 质量 δ. 对任意满足 $\varphi(0) \neq 0$ 的 $\varphi \in C_0^\infty$, 我们有

$$\widehat{\varphi\delta}(\xi) = \langle \delta, \varphi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \rangle = \varphi(0), \text{ 且 } \Sigma(\varphi\delta) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

这样 $WF(\delta) = \{(x, \xi), x = 0, \xi \neq 0\}$.

例 1.2.2 设

$$u = \begin{cases} -1, x_1 < 0, \\ +1, x_1 \geqslant 0. \end{cases}$$

我们有

$$\widehat{\varphi u}(\xi) = -\int_{x_1 \leqslant 0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_1 \geqslant 0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

在一个满足 $\xi_0' \neq 0$ 的方向 $\xi_0 = ((\xi_0)_1, \xi_0')$ 附近,当 $|\xi| \to +\infty$ 时, 上述两个积分都是速降的, 这是因为

$$\int_{x_1 \leqslant 0} = \int_{x_1 \leqslant 0} \mathrm{d}x_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_1\xi_1} \hat{\varphi}'(x_1, \xi') \,\mathrm{d}\xi',$$

其中 $\hat{\varphi}'$ 是对 ξ' 作的局部 Fourier 变换. 这样, $WF(u) \subset \{(x, \xi), x_1 = 0 且 \xi' = 0\}$.

不仅如此, 如果某一个满足 $\{x_1 = 0\}$ 的法方向不在 $WF(u)$ 中, 那么所有其他这样的法方向也将不在其中,理由是 u 是实的且对于 x' 的平移不变,于是 u 就会是 C^∞ 的. 这样 $WF(u) = \{(0, x', \xi_1, 0), \xi_1 \neq 0\}$.

下述定理描述了一类很重要的分布.

定理 1.2 设 $\varphi(x, \xi)$ 是 ξ 的 1 次齐次实函数,且对于 $\xi \neq 0$ 是 C^∞ 的. 设 $a \in S^m$ 当 $|x| \geqslant C$ 时为 0. 若在 $\operatorname{supp} a$ 上 $\mathrm{d}\varphi \neq 0$, 则我们可以定义 (振荡积分) $u = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x,\xi)} a(x, \xi) \,\mathrm{d}\xi$ 且 $WF(u) \subset \{(x, \eta), \eta = \varphi_x'(x, \xi), \varphi_\xi' = 0\}, (x,\xi) \in F, F \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$为任一满足 $\operatorname{supp} a \subset F$的锥形开集.[①]

定义的合理性是第 I 章附录中定理 1 的简单推论 (参见第 I 章习题 4.6), 而关于波前集的控制则可由定义出发利用一个非驻相定理 (习题 B.9) 得到.

II.B.2 线性算子和波前集

II.B.2.1 一个一般性定理

在这里我们承认下述定理,其初等证明只用到波前集的定义 (参见 [H4]).

定理 2.1 设 X, Y 分别是 $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ 中的开集, 而 $K \in \mathcal{D}'(X \times Y)$. 设 $WF(K)$ 不包含任何和 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}^m$ 平行的方向 (也就是说 $(x, y, \xi, \eta) \in WF(K) \Rightarrow \xi \neq 0$, 且 $\eta \neq 0$). 由公式 $\mathbf{K}u(x) = \int K(x, y)u(y) \,\mathrm{d}y$ 的算子 $\mathbf{K}$ 可以推广到 $\mathcal{E}'(Y)$ 上 (我们在这里考虑分布意义下的积分), 且

$$WF(\mathbf{K}u) \subset WF'(K) \circ WF(u), \tag{2.1.1}$$

其中:

$$WF'(K) = \{(x, y, \xi, \eta), (x, y, \xi, -\eta) \in WF(K)\}.$$

这里,

$$WF'(K) \circ WF(u) = \{(x, \xi), \exists (y, \eta) \in WF(u), (x, y, \xi, \eta) \in WF'(K)\}.$$

换句话说, $WF'(K)$ 描述了 $WF(u)$ 在 $\mathbf{K}$ 的作用下的位移. 我们特别提醒读者 (2.1.1) 只是一个包含关系. 下面我们给出该定理的若干应用.

[①]译校者注: 将用在下文性质 2.2.2 的证明中.

例 2.1.1 对 $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$,考虑算子 $Tu(x) = u(x, 0)$(可以叫做 "u 在 $t = 0$ 上的迹"), 其中 $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. 因为 $u(x, 0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \hat{u}^2(x, \tau)\,\mathrm{d}\tau$ ($\hat{}^2$ 表示对于 t 的部分 Fourier 变换),我们有

$$
\begin{aligned}
Tu(x) &= (2\pi)^{-n}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\widehat{Tu}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= (2\pi)^{-n-1}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\hat{u}(\xi, \tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau \\
&= (2\pi)^{-n-1}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\tau}u(y, t)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
$$

因此算子 T 的核函数 $K(x, y, t)$ (这里我们取 $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^{n+1}$) 是 Fourier 分布:

$$K(x, y, t) = (2\pi)^{-n-1}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\tau}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau,$$

其相位为

$$\Phi(x, y, t, \xi, \tau) = (x - y)\xi - t\tau.$$

我们知道, (根据定理 1.2), $WF(K) \subset \{(x, x, 0, \xi, -\xi, -\tau)\}$. 这样, $WF(K)$ 不包含任何平行于 $\mathbb{R}^n_\xi$ 的方向, 但它包含了和 $\mathbb{R}^{n+1}_{\xi,\tau}$ 平行的方向 $(\xi, -\xi, -\tau) = (0, 0, -\tau)$; 为了可以应用 (2.1.1), 我们承认 (习题 B.4), 只需要假设垂直方向 $(0, -\tau)$ 不在 u 的波前集中就够了. 我们得到

$$WF(Tu) \subset \{(x, \xi), \exists\tau, (x, 0, \xi, \tau) \in WF(u)\}.$$

如果要以一种更加直观的方式理解这种关系, 我们可以观察到如下事实:

i) $\{t = 0\}$ 之外的 u 的那些奇点显然对于 Tu 没有任何作用.

ii) 若 $\chi(D_x)$ 是一个 "切向的" 算子, 我们有 $\chi(D_x)Tu = T\chi(D_x)u$.

对某个 (x_0, ξ_0) 和任意的 τ, $(x_0, 0, \xi_0, \tau) \notin WF(u)$, 对 $P = \tilde{\chi}(D_x, D_t)\chi(D_x)\varphi$ 我们有 $Pu \in C^\infty$,其中 $\varphi \in C_0^\infty$ 是一个 (支集) 接近 $(x_0, 0)$ 的截断函数,而 χ 和 $\tilde{\chi}$ 是 0 阶象征, 且 χ 的支集在 x_0 的一个锥形邻域内, $\tilde{\chi}$ 在 $(0, \pm1)$ 的一个锥形邻域内为 0. 考虑到垂直向量不在 $WF(u)$ 中, $\tilde{\chi}\varphi u = \varphi u + C^\infty$, 我们有

$$\chi(D_x)T\varphi u = \chi(D_x)\varphi(x, 0)Tu \in C^\infty,$$

这就意味着 $(x_0, \xi_0) \notin WF(Tu)$.

例 2.1.2 设 $X = \partial_t + \sum_{i=1}^n a_i(x, t)\partial_{x_i}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上 C^∞ 实向量场. 考虑 Cauchy 问题:

$$Xu = 0, \quad u|_{t=0} = u_0,$$

并对充分小的 $T > 0$ 定义 $\mathbf{K}u_0 = u(x, T)$. 以 $x(t, x_0)$ 记 $\mathbb{R}^n$ 上微分方程:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = a_i(x, t), \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \\ &x(0) = x_0 \end{aligned}$$

的解. 曲线 $t \mapsto (x(t, x_0), t)$ 就是向量场 X 以 $(x_0, 0)$ 为起点的积分曲线; 因为任意解 u 在这些曲线上都是常数, $u(x(t, x_0), t) = u_0(x_0)$, 这就完全描述了我们考虑的 Cauchy 问题的唯一解 u(因为 $(x_0, t) \mapsto (x(t, x_0), t)$ 是一个局部微分同胚). u_0 的任何一个奇点 x_0 都 "反映" 在函数 u 沿着 X 的从 x_0 出发的积分曲线上的一个奇点上,或者 $\mathbf{K}u_0$ 在 $x(T, x_0)$ 的奇点 (因为 u 在 $x(T, x_0)$ 的迹是 C^∞ 的, 根据前面的推理 u 本身在 $(x(T, x_0), T)$ 附近也是 C^∞ 的). 这样算子 $\mathbf{K}$ 的作用将 u 的奇异支集沿着 X 的流的方向移动.

现在我们以更精细的方式来考察波前集.

我们有 $\mathbf{K}u_0(x) = u_0(\Phi^{-1}(x))$ (其中 $\Phi(x_0) = x(T, x_0)$), 它也可以写成

$$\mathbf{K}u_0 = (2\pi)^{-n} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Phi^{-1}(x)-y)\xi} u_0(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi.$$

这样核函数 K 就是 Fourier 分布:

$$K(x, y) = (2\pi)^{-n} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Phi^{-1}(x)-y)\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

由定理 1.2,我们得到 (以 ${}^tA$ 记 A 的转置)

$$WF(K) \subset \{(x, \Phi^{-1}(x), {}^t(\Phi^{-1})'(x)\xi, -\xi)\}.$$

这样利用 (2.1.1),

$$WF(\mathbf{K}u_0) \subset \{(\Phi(y), \xi), \xi = {}^t\Phi'^{-1}(y)\eta, (y, \eta) \in WF(u_0)\}.$$

我们可以通过下述方法把 Φ 诱导的映射 $(y, \eta) \mapsto (x, \xi)$ 形象地表达出来: 若 S 是一个过 y 点的曲面,且在该点以 η 为法向量, 则 $\Phi(S)$ 是一个过 x 的曲面且在该点以 ξ 为法向量. 与此同时, 这个解释可以让我们已经得到的关于 $WF(\mathbf{K}u_0)$ 的结果显得更加 "直观"(利用例 1.2.2 中的方法). 这样 X 的流诱导了一个映射 $(y, \eta) \mapsto (x, \xi)$,可以用来描述波前集在算子 $\mathbf{K}$ 作用下的位移.

例 2.1.3　我们来考虑波动方程

$$\Box u = (\partial_t^2 - \Delta_x)u = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad \partial_t u(x, 0) = u_0 \tag{2.1.2}$$

的 Cauchy 问题的解,其中 $\Delta_x = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$ 是 Laplace 算子.

利用关于 x 的部分 Fourier 变换 (这里我们稍许滥用一下记号), 很容易计算 u; 事实上

$$\partial_t^2 \hat{u} + |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) = 0, \quad \hat{u}(\xi, 0) = 0, \quad \partial_t \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0,$$

这样

$$\hat{u}(\xi, t) = A(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t|\xi|} + B(\xi)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t|\xi|},$$

其中

$$A + B = 0, \ \ \mathrm{i}|\xi|(A - B) = \hat{u}_0,$$

最后得到

$$u(x, t) = \frac{1}{2\mathrm{i}(2\pi)^n} \left\{ \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\xi + \mathrm{i}t|\xi|} \frac{1}{|\xi|} u_0(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}\xi - \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\xi - \mathrm{i}t|\xi|} \frac{1}{|\xi|} u_0(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}\xi \right\}.$$

我们现在假设 u 是所考虑问题的唯一解, 且在上述积分中将 $1/|\xi|$ 替换成 $(1 - \chi(\xi))/|\xi|$ ($\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 在 0 点附近 $\chi = 1$) 定义了一个新的函数 $\tilde{u}$, 它和 u 的差是一个 C^∞ 函数.

我们注意到 $\tilde{u} = (\mathbf{K}_+ + \mathbf{K}_-)\, u_0$, 其中算子 $\mathbf{K}_\pm$ 的核函数 $K_\pm$ 是 Fourier 分布

$$K_\pm = \frac{1}{2\mathrm{i}(2\pi)^n} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\xi \pm \mathrm{i}t|\xi|} \frac{1 - \chi(\xi)}{|\xi|}\, \mathrm{d}\xi.$$

由定理 1.2, 我们有

$$WF(K_\pm) \subset \left\{ (x, t, y, \xi, \pm|\xi|, -\xi),\, x - y \pm t\frac{\xi}{|\xi|} = 0 \right\},$$

这样

$$WF(\mathbf{K}_\pm u_0) \subset \left\{ (x, t, \xi, \pm|\xi|),\, (y, \xi) \in WF(u_0),\, \text{其中}\, y = x \pm t\frac{\xi}{|\xi|} \right\}.$$

从几何上说, 我们可以作从 y 出发的 "光锥": $\Gamma_y = \{t^2 = |x - y|^2\}$: u_0 的奇点 (y, ξ) "反映" 在 $\mathbf{K}_\pm u_0$ 的奇点中, 而后者的奇点集合是在锥 Γ_y 的母线的每一点上都只有与母线垂直的方向 $(\xi, \pm|\xi|)$.

在 $n = 1$ 的特殊情形, $\square = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x)$, 这样任意形如 $u = \Phi(x + t)$ ($(\partial_t - \partial_x)u = 0$ 的一个解) 或 $u = \Psi(x - t)$ ($(\partial_t + \partial_x)u = 0$ 的一个解) 的函数都是 $\square u = 0$ 的解. 从而 (2.1.2) 的解就是 $u = \Phi(x + t) - \Phi(x - t)$ (其中 $2\Phi'(x) = u_0(x)$), 或 $u(x, t) = 1/2 \int_{x-t}^{x+t} u_0(s)\, \mathrm{d}s$. 就像在例 2.1.2 中一样, u_0 的奇点 "反映" 在 u 的两个 (因为我们有两个向量场 X) 奇点之中; 在波前集的水平上我们可以把这个分析做得更精细化.

$n \geqslant 2$ 的情形和 $n = 1$ 的情形的本质区别是 u 的奇异支集将依赖于 u_0 的波前集而不仅仅是它的奇异支集. 比方说, 如果 u_0 在 0 点以外是 C^∞ 的, 我们知道 $\operatorname{sing\,supp} u \subset \Gamma_0$; 但是要想知道哪些母线构成了 $\operatorname{sing\,supp} u$, 我们必须知道 $WF(u_0)$ 在 0 点处包含了哪些方向. 我们通过这个例子就可以看到引进波前集并不仅仅是对奇异支集的分析作简单的精细化, 而是一件非做不可的事情.

II.B.2.2 拟微分算子和波前集

一般性定理 2.1 在拟微分算子上的应用是非常有意思的.

性质 2.2.1 设 A 是一个具有核函数 K 的拟微分算子. 则 $WF(K) \subset \{(x, x, \xi, -\xi), \xi \neq 0\}$.

证明 事实上 $K(x, y) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\xi} a(x, \xi)\,\mathrm{d}\xi$ 是一个 Fourier 分布,这样由定理 1.2 就可以得到结论. □

推论 2.2.1 设 A 是一个拟微分算子. 对任意 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $WF(Au) \subset WF(u)$.

证明 若 $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 则由于 $WF'(K) \subset \{(x, x, \xi, \xi)\}$, 根据定理 2.1 和性质 2.2.1 即可得到结论. 若 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 而 $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$, 则对于在 x_0 附近取值为 1 的函数 $\chi \in C_0^\infty$ 我们有 $(x_0, \xi_0) \notin WF(\chi u)$. 所以 $(x_0, \xi_0) \notin WF(A\chi u)$ 且对于在 x_0 附近取值为 1 的函数 $\tilde{\chi} \in C_0^\infty$ 我们有 $(x_0, \xi_0) \notin WF(\tilde{\chi} A\chi u)$; 然而对于在 $\operatorname{supp}\tilde{\chi}$ 的一个邻域内取值为 1 的函数 χ 我们有 $\tilde{\chi}A\chi u = \tilde{\chi}Au + C^\infty$; 因此对于这样的 χ 和 $\tilde{\chi}$, $(x_0, \xi_0) \notin WF(\tilde{\chi}Au)$, 由此推出 $(x_0, \xi_0) \notin WF(Au)$. □

推论 2.2.1 中描述的性质被称为 "拟局部性质": 它意味着一个拟微分算子的作用不会移动波前集 (参考例 2.1.2 和例 2.1.3),但是有可能把它减小: 例如, 不管 Φ 的光滑性多么差,我们都有 $\partial_t \Phi(x) = 0$.

我们将给出这一作用的更精确的描述.

性质 2.2.2 设 Γ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 中一个锥形开集, 而 $a \in S^m$ 在 Γ 中是 $S^{-\infty}$ 的 (也就是说对于任意的 $(x_0, \xi_0) \in \Gamma$, 存在使得刻画 $S^{-\infty}$ 的估计式成立的 (x_0, ξ_0) 的锥形邻域). 那么,对于 $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ 和 $A = \mathrm{Op}(a)$,我们有 $WF(Au) \cap \Gamma = \varnothing$.

证明 设 $(x_0, \xi_0) \in \Gamma$ 而 $q(x, \xi) \in S^0$ 在 (x_0, ξ_0) 附近取值为 1,且 $aq \in S^{-\infty}$; 算子 $A_1 = \mathrm{Op}(aq)$ 具有 C^∞ 核函数, 而根据定理 1.2,算子 $A_2 = \mathrm{Op}(a(1-q))$ 的核函数在 $(x_0, x_0, \xi_0, -\xi_0)$ 附近是 C^∞ 的. 这样由定理 2.1, $(x_0, \xi_0) \notin WF(A_2 u)$, 且 $Au = A_2 u + C^\infty$, 证毕. □

换句话说, 算子 A 的作用是在它的象征为 $-\infty$ 阶的地方破坏波前集.

反之,我们有下述推论.

推论 2.2.2 若 $a \in S^m$, 在 (x_0, ξ_0) 附近 $Au \in C^\infty$, 且在 (x_0, ξ_0) 的一个锥形邻域内当 $|\xi| \geqslant C$ 时 $|a(x, \xi)| \geqslant c|\xi|^m$,则 $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$.

证明 由定义, 存在 $\tilde{b} \in S^{-m}$ 使得在 (x_0,ξ_0) 的一个邻域内有 $a\tilde{b} - 1 \in S^{-1}$. 如同在 I.5.4 节中一样, 我们知道存在 $b \in S^{-m}$ 使得在 (x_0,ξ_0) 附近 $b\#a - 1 \in S^{-\infty}$. 因为 $u = BAu - (BA - \mathrm{id})u$, 由性质 2.2.2 和拟局部性质即可得证. □

也就是说, 在 A 的象征的非特征点 (即满足推论 2.2.2 的那些点) 上, 波前集在 A 的作用下不变.

推论 2.2.2 可以用作波前集的一个刻画: $WF(u) = \cap\,\mathrm{char}(A)$, 其中 A 是所有使得 $Au \in C^\infty$ 的恰当支撑算子, $\mathrm{char}(A)$ 是 A 的象征的特征点的集合. 得到推论 2.2.2 的一个只用到波前集原始定义的直接证明是有益的. 这里我们对 $\mathbb{R}^n$ 中开集 X 上的微分算子 $P(x, D)$ 给出这样一个证明: 设 $u \in \mathcal{D}'(X)$; 我们假设 $p_m(x_0, \xi_0) \neq 0$, 且 $(x_0, \xi_0) \notin WF(Pu)$.

为了证明 $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$, 我们考虑 $\widehat{\varphi u}(\xi)$, 即 $\langle u, \varphi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\rangle$: 证明的思路是把 $\varphi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}$ 写成 ${}^tP(\psi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi})$ 的形式, 这样根据对 Pu 做的约定

$$\langle u, \varphi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\rangle = \langle u, {}^tP(\psi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi})\rangle = \langle Pu, \psi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\rangle$$

就会具有合适的递降速度. 我们记 $Q = {}^tP$ (相应的 $q_m = (-1)^m p_m$) 并注意到

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} Q(\psi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}) = q_m(x, \xi)\psi + Q_{m-1}\psi + \cdots + Q_0\psi,$$

其中 $Q_j\psi$ 是左边的项的 (对于 ξ) j 次齐次部分, 这是一个多项式,其系数为 ψ 在一些 $m-j$ 阶微分算子作用下的像.

为了对 (x_0, ξ_0) 附近的 (x, ξ) 计算 $q_m(x, \xi)\psi + \cdots + Q_0\psi = \varphi$,我们可以考虑

$$\psi = \psi_N = \frac{1}{q_m(x, \xi)}(\varphi + a_1(x, \xi) + \cdots + a_N(x, \xi)),$$

其中 $a_j(x, \xi)$ 对于 ξ 是 $-j$ 次齐次的, 且由下述关系式所决定:

$$a_1 + Q_{m-1}(\varphi/q_m) = 0,$$
$$a_2 + Q_{m-1}(a_1/q_m) + Q_{m-2}(\varphi/q_m) = 0, \text{等等}$$

于是, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} Q(\psi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}) = \varphi + r_{N+1}$, 其中 r_{N+1} 是一个 ξ 的 $-N-1$ 阶象征, $\mathrm{supp}\, r_{N+1} \subset \mathrm{supp}\,\varphi$.

那么对于 $\langle Pu, \psi_N \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\rangle$ 我们可以得到什么结论呢? 我们知道,对于某个在 x_0 附近取值为 1 的函数 $\chi \in C_0^\infty$, 和某个 $\xi_0 \notin \Sigma(\chi Pu)$, 可以取 $\mathrm{supp}\,\varphi \supset \mathrm{supp}\,\psi_N$ 充分小使得在 $\mathrm{supp}\,\varphi$ 的一个邻域上 $\chi = 1$, 我们能够得到 $\langle Pu, \psi_N \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\rangle = (\widehat{\psi_N \chi Pu})(\xi)$, 所以根据 (1.1.2),

$$(1+|\xi|)^k|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leqslant (1+|\xi|)^k|(\widehat{r_{N+1}u})|(\xi) + C_k\int |\widehat{\psi_N}(\eta, \xi)|(1+|\eta|)^{k+M}\,\mathrm{d}\eta.$$

对于充分大的 N,第二项对于 ξ 是有界的, 证毕. □

性质 2.2.2 的重要性还表现在: 如果我们在一点 (x_0, ξ_0) 的邻域里研究方程 $Pu = f$, 那么只需要考察 P 的象征 p 在 (x_0, ξ_0) 的邻域里的性态. 这样我们就可以利用各种在局部研究函数的工具来了解 p 的结构并由此得到 P 的性质.

II.C 能量估计

这里我们将看到, 对于寻找和控制一大类算子和微分系统的解, 我们只需要研究一阶数值拟微分算子就可以了 (可以参考例 2.1.3 的讨论).

II.C.1 一阶算子

我们将考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的方程

$$\begin{aligned} Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + a(t,\, x,\, D)u = f, \quad 0 < t < T, \\ u(0,\, x) = \varphi, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中

i) $a_t(x,\, \xi) = a(t,\, x,\, \xi)$ 对于 $0 \leqslant t \leqslant T$ 都包含在 S^1 的一个有界集中.

ii) $t \mapsto a_t$ 作为取值在 C^∞ 中的映射是连续的.

iii) a 的主象征 $a_1(t,\, x,\, \xi)$ 是纯虚的.

我们需要强调, a 作为算子在 $u(t,\, \cdot)$ 上的作用 $a(t,\, x,\, D)u$ 只是对于变量 x 做的 (算子被称为 "切向的").

这样的算子 L 的原型是一个实向量场 $X = \partial_t + \sum a_j \partial_j$, 其中 $a = \mathrm{i}\left(\sum\limits_j a_j \xi_j\right)$ 满足 i), ii) 和 iii). 简单地把 a 的条件放宽到拟微分算子类而不引进更多的技术困难, 可以让我们有能力处理很多应用问题.

II.C.1.1 能量估计

性质 1.1 若 $s \in \mathbb{R}$ 而 $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geqslant \lambda_s$, 则对于任意的 $u \in C^1([0,\, T]; H^s) \cap C^0([0,\, T]; H^{s+1})$, 我们有不等式

$$\sup_{t \in [0,\, T]} \mathrm{e}^{-\lambda t} |u(t,\, \cdot)|_s \leqslant |u(0,\, \cdot)|_s + 2\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t} |Lu(t,\, \cdot)|_s \,\mathrm{d}t. \tag{1.1.1}$$

证明 a) 首先假设 $s = 0$. 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\mathrm{e}^{-\lambda t} u(t,\, \cdot)|_0^2 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \mathrm{e}^{-2\lambda t} u(t,\, x) \overline{u}(t,\, x) \,\mathrm{d}x \\ &= -2\lambda |\mathrm{e}^{-\lambda t} u(t,\, \cdot)|_0^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{-2\lambda t} u_t,\, u); \end{aligned}$$

另一方面

$$(\mathrm{e}^{-2\lambda t} au,\, u) = (\mathrm{e}^{-2\lambda t} u,\, a^* u) = (\mathrm{e}^{-2\lambda t} u,\, (-a + b)u),$$

其中由 iii) 和第 I 章定理 3.2.3, 我们知道 $b = b(t,\, x,\, D) \in S^0$, 因此

$$2\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{-2\lambda t} au,\, u) = (\mathrm{e}^{-2\lambda t} u,\, bu).$$

所以

$$2\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{-2\lambda t}Lu,\, u) \geqslant \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathrm{e}^{-\lambda t}u(t,\,\cdot)|_0^2 + (2\lambda - B)|\mathrm{e}^{-\lambda t}u(t,\,\cdot)|_0^2,$$

其中对于 $0 \leqslant t \leqslant T$,我们有 $B \geqslant \|b\|_{L_x^2 \to L_x^2}$. 对 $\lambda \geqslant B/2$, 由 0 到 T 做积分, 我们得到 $M^2 \leqslant |u(0,\,\cdot)|_0^2 + 2MI$, 其中 $M = \sup\limits_{t\in[0,\,T]} \mathrm{e}^{-\lambda t}|u(t,\,\cdot)|_0$, $I = \int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}|Lu(t,\,\cdot)|_0\,\mathrm{d}t$, 这样最后得到

$$M \leqslant |u(0,\,\cdot)|_0 + 2I.$$

b) 对 $s \in \mathbb{R}$, 我们记 $E_s = (1+|D_x|^2)^{s/2}$: 函数 $E_s u$ 满足方程 $\tilde{L}E_s u = E_s Lu$,其中 $\tilde{L} = \partial_t + \tilde{a}$, $\tilde{a} = E_{-s}aE_s$. 注意到 $\tilde{a}$ 和 a 一样满足性质 i), ii) 和 iii). 于是 a) 中的估计就给出了 (1.1.1). □

这个简单证明的好处在于它可以推广到一阶算子组 (也就是说当 a 是一个 $N\times N$ 矩阵) 的情形, 这时我们将假设 iii) 替换成

iii)′ 矩阵 $\mathrm{i}a_1(t,\,x,\,\xi)$ 是实对称 (或 Hermite) 的. (可以参考习题 C.7).

这样的微分方程组被称为 "对称双曲" 的,在物理中有非常重要的应用 (参见 III.B.1 节的内容).

II.C.1.2 解的存在性

在偏微分方程领域经常发生的情况是,一个算子的解 (即其核的非零元素) 的存在性, 是关于这个算子的一些不等式的推论.

本小节中我们将考虑一个非常典型的情况.

性质 1.2 设对于所有的 $s \in \mathbb{R}$, $f \in L^1([0,\,T];H^s)$ 且 $\varphi \in H^s$, 则 Cauchy 问题 (1.1) 具有唯一解 $u \in C([0,\,T];H^s)$, 且该解满足能量估计 (1.1.1).

证明 a) 我们先来验证唯一性. 若 $f=0$, $\varphi=0$,方程 $Lu=0$ 推导出 $u \in C^1([0,\,T];H^{s-1})$, 我们能够应用不等式 (1.1.1)(把 s 换成 $s-1$), 因此 $u=0$.

b) 从一个不等式出发证明一个存在性定理的过程通常要用到 "对偶方法": 我们证明某个空间上的一个线性形式是连续的 (在这一步我们用到不等式),然后我们用一个具体的函数来把这个形式写出来,这个函数就给出了一个解.

为阐明下面的推理, 我们首先注意到若 u 是 (1.1) 的一个解, 则对于任意的 $v \in C_0^\infty(\{t<T\})$,有

$$\int_0^T (u,\, L^*v)\,\mathrm{d}t = \int_0^T (Lu,\, v)\,\mathrm{d}t + (\varphi,\, v(0,\,\cdot)),$$

其中 $L^* = -\partial_t + a^*(t,\,x,\,D)$.

这样我们考虑共轭线性形式

$$\psi : L^*v \mapsto \int_0^T (f,\, v)\,\mathrm{d}t + (\varphi,\, v(0,\,\cdot)) = \psi(L^*v).$$

它在 $L^1([0,T];H^{-s})$ 的子空间 $E=L^*(C_0^\infty(\{t<T\}))$ 上是有定义的,因为 L^* 满足估计 (1.1.1)

$$\sup_{t\in[0,T]}|v(t,\cdot)|_{-s}\leqslant C\int_0^T|L^*v(t,\cdot)|_{-s}\,\mathrm{d}t.$$

线性映射 ψ 是连续的, 因为根据上面的估计

$$|\psi(L^*v)|\leqslant 常数\cdot\left(|\varphi|_s+\int_0^T|f(t,\cdot)|_s\,\mathrm{d}t\right)\int_0^T|L^*v(t,\cdot)|_{-s}\,\mathrm{d}t.$$

Hahn–Banach 定理让我们有可能把 ψ 延拓成一个 ($L^1([0,T];H^{-s})$ 上的) 连续线性映射 $\tilde{\psi}$. 我们可以用一个函数 $u\in L^\infty([0,T];H^s)$ ($L^1([0,T];H^{-s})$ 的对偶) 来表示 $\tilde{\psi}$: $\psi(L^*v)=\int_0^T(u,L^*v)\,\mathrm{d}t$, 这样对于任意的 $v\in C_0^\infty(\{t<T\})$,我们就有

$$\int_0^T(u,L^*v)\,\mathrm{d}t=\int_0^T(f,v)\,\mathrm{d}t+(\varphi,v(0,\cdot)).\tag{1.2.1}$$

余下的部分主要是巧妙地应用 (1.2.1).

c) 首先, 如果我们取 $v\in C_0^\infty(\{0<t<T\})$ (也就是说 v 在 $t=0$ 附近也为 0), 那么 (1.2.1) 和 L^* 的定义可以推出在 $\mathcal{D}'(\{0<t<T\})$ 的意义下 $Lu=f$. 如果 f 在 $\mathcal{S}$ 中取值且连续, 我们利用方程就可以得到 $\dfrac{\partial u}{\partial t}\in L^\infty([0,T];H^{s-1})$, 这样 $u\in C([0,T];H^{s-1})$ 且 (再次利用方程可以得到) $u\in C^1([0,T];H^{s-2})$.

但是这样一来,对于 u 我们可以用分部积分计算 $\int_0^T(u,L^*v)\,\mathrm{d}t$,由 (1.2.1) 就可以得到对于任意的 $v\in C_0^\infty(t<T)$,有 $(u(0,\cdot),v(0,\cdot))=(\varphi,v(0,\cdot))$, 即 $u(0,\cdot)=\varphi$.

在证明的这一步, 我们对 $\mathcal{S}$ 中的 (f,φ) 得到了 (1.1) 的一个解 u,且 u 的光滑性使我们可以对它应用 (1.1.1).

d) 现在我们来做逼近,要点在于 (1.1.1) 中先验要求的 u 的光滑性只出现在不等式的各项中 (也就是说和系数没有关系); 因此在求极限以后就自然消失了.

对于如上所述的 f,φ, 我们选择

$$f_k\in\mathcal{S},\ \varphi_k\in\mathcal{S},\ 其中\int_0^T|(f-f_k)(t,\cdot)|_s\,\mathrm{d}t\to 0,\ |\varphi-\varphi_k|_s\to 0.$$

把 f_k,φ_k“视为”取值在 H^{s+2} 中的函数, c) 给出了 (1.1) 的一个解 $u_k\in C^1([0,T];H^s)\cap C^0([0,T];H^{s+1})$.

对 u_k-u_l 应用能量估计 (1.1.1) 可知, u_k 是 $C([0,T];H^s)$ 中一个 Cauchy 序列, 它的极限 $u\in C([0,T];H^s)$ 就是我们要找的解. 不仅如此, 把对 u_k 的能量估计求极限,我们就得到对 u 的估计. □

对于前面提到过的一阶对称组的情形,我们有完全类似的证明.

II.C.1.3 奇性的传播

作为展示拟微分算子方法的一个例子, 我们对于 $f \equiv 0$ 的情形来求 (1.1) 的一个解 $u(t, \cdot)$ 的奇点 (可以与例 B.2.1.2 中关于实向量场的情形作比较).

证明的思路如下: 若 $Q = Q(t, x, D)$ 和 L 交换, 则 Qu 满足

$$LQu = 0,\ (Qu)(0, \cdot) = Q(0, x, D)\varphi.$$

如果我们还有 $Q(0, x, D)\varphi \in C_0^\infty$, 那么性质 1.2 说明对于任意的 t, $Q(t, x, D)u \in C^\infty$, 所以根据推论 B.2.2.2,

$$WF(u(t, \cdot)) \subset \{(x, \xi), q(t, x, \xi) = 0\}.$$

a) 实际上,Q 只会和 L"近似地" 交换, 我们这就来给出这一点的精确意义.

我们寻求 $q \sim \sum_{j \geqslant 0} q_j$ (q_j 是 $-j$ 次齐次的), 我们记 $a \sim \sum_{j \geqslant 0} a_j$ (a_j 是 $1-j$ 次齐次的).

(切向) 交换子 $[L, Q]$ 的主象征等于 $\partial_t q_0 + \frac{1}{\mathrm{i}}\{a_0, q_0\}$, 而 $-j$ 阶项的象征为 $\partial_t q_j + \frac{1}{\mathrm{i}}\{a_0, q_j\} + r_j$, 其中 r_j 是 $q_0, \cdots, q_{j-1}$ 的一个 (能够显式写出来的) 函数.

这样我们就要一步步地解微分方程

$$\frac{\partial q_0}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{i}} H_{a_0} q_0 = 0, \quad q_0(0, x, \xi) = \tilde{q}_0(x, \xi) \tag{1.3.1}$$

$$\frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{i}} H_{a_0} q_j + r_j = 0, \quad q_j(0, x, \xi) = \tilde{q}_j(x, \xi). \tag{1.3.2}$$

以 $(x, \xi) = \chi_t(y, \eta)$ 来记方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial a_0}{\partial \xi}(t, x, \xi),\ \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial a_0}{\partial x}(t, x, \xi),\ x(0) = y,\ \xi(0) = \eta$$

的解. 易见对于 $0 \leqslant t \leqslant T, \chi_t$ 是存在且可逆的 (x 和 ξ 分别是对于 η 的 0 次和 1 次齐次函数). 这样 (1.3.1) 的解就是 $q_0(t, x, \xi) = \tilde{q}_0(\chi_t^{-1}(x, \xi))$ (参考 II.B.2.1 节), 而 (1.3.2) 的解可以通过 "常数变易法" 得到.

如果我们取 $q \sim \sum q_j$, 可以得到 $q(0, x, \xi) \sim \tilde{q}$ 和 $[L, Q] = R(t, x, D)$, 其中 $r(t, x, \xi)$ 是取值在 $S^{-\infty}$ 中的 t 的连续函数.

b) 现在假设 $(x_0, \xi_0) \notin WF(\varphi)$: 那么存在 $\tilde{q}(x, \xi)$, 满足 $\tilde{q}(x_0, \xi_0) \neq 0$ 和 $\tilde{q}(x, D)\varphi \in C_0^\infty$. 对于 (1.1) 的解 u 和任意的 s, 我们有

$$LQu \in C([0, T]; H^s),$$
$$Qu|_{t=0} \in C_0^\infty$$

(Q 对应于 a) 中构造的 $\tilde{q}$).

这样, 对于任意的 t, 我们有 $\chi_t(x_0, \xi_0) \notin WFu(t, \cdot)$. 因为我们可以逆转时间箭头,最终我们得到下述性质:

性质 1.3 若 u 是 (1.1) 的一个解,其中 $f \equiv 0$, $\varphi \in \bigcup_s H^s$, 则 $u \in C([0, T]); \bigcup_s H^s)$, 且对于 $0 \leqslant t \leqslant T$, $WF(u(t, \cdot)) = \chi_t(WF(\varphi))$,其中 χ_t 由下述微分方程组所定义

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial a_1}{\partial \xi}(t, x, \xi), \quad \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial a_1}{\partial x}(t, x, \xi) \\ &x(0) = y, \quad \xi(0) = \eta, \quad (x, \xi) = \chi_t(y, \eta). \end{aligned}$$

这一结果可以在好几个方向上得到推广:

i) 当我们固定 t 时, 容易验证 χ 是典则的 (即它保持 2- 形式 σ 不变, 参考第 I.7.2.1 节).

ii) 算子 $K : \varphi \to u(t_0, \cdot)$ 是一个 "和典则变换 χ_{t_0} 相关联的椭圆 Fourier 积分算子". 上面讨论的例子在历史上是这一理论的出发点 (参见 [H2, H4, H5]).

另一方面, 我们可以从性质 1.3 推导出 Hörmander 的奇性传播定理,陈述如下 (具体过程参见习题 C.3):

设 P 是开集 $X \subset \mathbb{R}^n$ 上 m 阶恰当支撑拟微分算子,其主象征为 p_m. 若 $u \in \mathcal{D}'(X)$ 满足 $Pu \in C^\infty(X)$, 则 $WF(u)$ 是由 H_{p_m} 的一些从 $p_m = 0$ 出发的积分曲线构成的.

这一定理是微局部分析的基本结果之一,它使我们有可能将从底空间 X 上一点 $x_0 \in \operatorname{sing\,supp} u$ 出发的奇性传播线根据它们在 T^*X 中的奇点 (x_0, ξ_0) 做拆分 (参考例 2.1.3 中的讨论和习题 C.2).

II.C.2 m 阶算子

对于 $x \in \mathbb{R}$,一个 m 阶微分算子

$$P(x, t, D_x, D_t) = \sum_{k+l \leqslant m} a_{k,l} D_x^k D_t^l \quad (a_{0,m} \equiv 1),$$

可以被 "分解" 成如下形式:

$$P(x, t, D_x, D_t) = (D_t - \lambda_1(t, x)D_x) \cdots (D_t - \lambda_m(t, x)D_x) + m - 1 \text{ 阶算子},$$

其中 λ_j 是 (关于 τ 的) 多项式 $p_m = \sum_{k+l=m} a_{k,l}\xi^k\tau^l = 0$ 的根 (假设它们两两不同).

当 $x \in \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ 时, 关于 τ 的方程 $p_m(x, t, \xi, \tau) = 0$ 的根 (始终假设它们两两不同) 对于 ξ 只是 1 次齐次的,而相应的因子 $D_t - \lambda_j(t, x, D_x)$ 是 C.1 节中考察

过的拟微分算子. 因为关于 τ 的根两两不同, 容易证明 (习题 C.4) 我们可以把 P 的象征 (而不仅仅是主象征) 做分解; 我们将只用到下述更为初等的事实.

考虑一个形如 $P = P(x, t, D_x, D_t) = \sum_{j\leqslant m} P_j(x, t, D_x)D_t^j$ 的算子, 其中 $P_m \equiv 1$, 而 P_j 是 $m-j$ 阶的,其主象征 p_j 关于 ξ 是 $m-j$ 次齐次函数.

我们假设:

(H) 多项式 $p = \sum p_j(x, t, \xi)\tau^j = 0$ 关于 τ 的根都是实的 (P 的 "双曲性" 假设)

(S) 这些根都是 (一致) 单的, 也就是说当 $p=0$ 时 $\left|\frac{\partial p}{\partial \tau}(x, t, \xi, \tau)\right| \geqslant C|\xi|^{m-1}$. (这样的 P 被称为 "严格双曲" 的).

对于这样的 P, 我们有一个类似于 (1.1.1) 的能量估计.

性质 2.1 设 $s\in\mathbb{R}$, 对于所有满足 $Pu \in L^1([0, T]; H^s)$ 的函数 $u \in \bigcap_{j=0}^{m-1} C^j([0, T], H^{s+m-1-j})$, 我们有不等式

$$\sum_{j\leqslant m-1}\sup_{t\in[0,T]}|D_t^j u(t, \cdot)|_{s+m-1-j} \leqslant C\left\{\sum_{j\leqslant m-1}|D_t^j u(0, \cdot)|_{s+m-1-j} + \int_0^T |Pu(t, \cdot)|_s\,\mathrm{d}t\right\}. \tag{2.1}$$

证明 a) 设 $\lambda_1(x, t, \xi) < \lambda_2(x, t, \xi) < \cdots < \lambda_m(x, t, \xi)$ 是 p 的 m 个实根. 条件 (S) 推出 $|\partial_\xi^\beta\partial_x^\alpha\lambda_j(x, t, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}|\xi|^{1-|\beta|}$, 这样对于在 0 点附近取值为 1 的函数 $\chi\in C^\infty$, 我们就有 $\Lambda_j(x, t, \xi) = (1-\chi(\xi))\lambda_j(x, t, \xi) \in S^1$. 现在我们来证明对于任意的 j, 可以找到

$$Q_j = \sum_{k=0}^{m-1} Q_{jk}(x, t, D_x)D_t^k$$

(其中 $Q_{jk}\in S^{m-1-k}, Q_{j(m-1)} = 1$), 和

$$R_j(t, x, D_x) \in S^{m-1}$$

使得

$$P = (D_t - \Lambda_j(x, t, D_x))Q_j + R_j.$$

事实上, 记

$$\begin{aligned} P_jD_t^j &= D_tP_jD_t^{j-1} - \frac{1}{\mathrm{i}}(\partial_tP_j)D_t^{j-1}\\ &= (D_t - \Lambda_j)P_jD_t^{j-1} + \Lambda_jP_jD_t^{j-1} - \frac{1}{\mathrm{i}}(\partial_tP_j)D_t^{j-1}, \end{aligned}$$

然后对最后两项重复这一操作, $\cdots$ 重复若干次之后就可以得到我们需要的表达式, 且余项 $R_j = R_j(t, x, D_x) \in S^m$. 但是注意到当 $\tau = \lambda_j$ 时, R_j 的主象征 $p - (\tau - \lambda_j)q_j$ (它不依赖于 τ) 为零; 因此 $R_j \in S^{m-1}$.

b) 对算子 $D_t - \Lambda_j$ 的能量估计 (1.1.1) 给出 (对于充分大的 λ)

$$\sup \mathrm{e}^{-\lambda t}|Q_j u(t,\cdot)|_s \leqslant |Q_j u(0,\cdot)|_s + 2\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\{|Pu(t,\cdot)|_s + C|u(t,\cdot)|_{s+m-1}\}\,\mathrm{d}t.$$

我们来证明,对于全体 $Q_j u$ 的控制可以用来给出 (2.1) 左边的一个控制: Q_j 的主象征是 $q_j = \prod\limits_{k\neq j}(\tau - \lambda_k)$, 且 q_j 构成了次数 $\leqslant m-1$ 的 τ 的多项式空间的一组基; 特别的, 对 $k \leqslant m-1$,

$$\tau^k = \sum q_j \frac{\lambda_j^k}{q_j(x,t,\xi,\lambda_j)}.$$

记

$$M_{kj}(t,x,\xi) = (1-\chi(\xi))\frac{\lambda_j^k(x,t,\xi)}{q_j(x,t,\xi,\lambda_j)},$$

我们就定义了一个函数 $M_{kj} \in S^{k-(m-1)}$, 使得

$$D_t^k u = \sum M_{kj} Q_j u + \sum_{j=0}^{m-1} R_{kj}(t,x,D) D_t^j u,$$

其中 $R_{kj} \in S^{k-j-1}$. 我们得到估计:

$$\sum_{k\leqslant m-1} |D_t^k u(t,\cdot)|_{s+m-1-k} \leqslant C\left\{\sum |Q_j u(t,\cdot)|_s + \sum_{k\leqslant m-1} |D_t^k u(t,\cdot)|_{s+m-2-k}\right\}.$$

c) 我们用下述方法来处理 "误差项"

$$\sum_{k\leqslant m-1} |D_t^k u(t,\cdot)|_{s+m-2-k}$$

- 当 $k = m-1$ 时, $|Q_1 u - D_t^{m-1} u|_{s-1}$ 是由一些 $k \leqslant m-2$ 的和式 Σ' 所控制的.
- 当 $k \leqslant m-2$ 时, 我们对算子 $L = \partial_t$ 用能量估计 (1.1.1), 可得

$$\begin{aligned}&\sup \mathrm{e}^{-\lambda t}|D_t^k u(t,\cdot)|_{s+m-2-k}\\ &\qquad\leqslant |D_t^k u(0,\cdot)|_{s+m-2-k} + 2\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}|D_t^{k+1} u(t,\cdot)|_{s+m-2-k}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

d) 最后, 我们得到

$$\begin{aligned}\sup \mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{k\leqslant m-1} |D_t^k u(t,\cdot)|_{s+m-1-k} \leqslant C\Bigg\{&\sum_{k\leqslant m-1} |D_t^k u(0,\cdot)|_{s+m-1-k}\\ &+ \int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}|Pu(t,\cdot)|_s\,\mathrm{d}t + \int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{k\leqslant m-1} |D_t^k u(t,\cdot)|_{s+m-1-k}\,\mathrm{d}t\Bigg\}.\end{aligned}$$

利用常见的 "Gronwall 型" 推理就可以得到结论.

当然, 与 II.C.1.2 节相仿, 从 (2.1) 出发也可以得到一个关于 Cauchy 问题

$$Pu = f, \quad D_t^j u(0, \cdot) = u_j, \quad j \leqslant m-1$$

的存在性定理. 但相应的过程略显复杂, 我们就不继续了.

第 II 章注记

第 II 章在第 I 章的 "核心" 理论与第 III 章中将要简略讨论的 "现实" 的非线性问题之间建立了一个桥梁.

II.A "非线性二进分析" 是建立在对于频率的二进分解的系统应用上的. 这个思想在 Coifman 和 Meyer 的著作 [CM] 中就有描述, 而且被证明对于非线性方程的分析特别有效: 我们可以在 Bony [B1] 中找到 "仿积", "仿微分算子" 等基本概念和相应的 "仿线性化" 公式的介绍, 而 "仿复合" 的概念是在 Alinhac [A] 中构造和研究的. 本书中的讲法受到 Meyer [M] 的启发, 这种办法同样可以用来处理 L^p 空间.

除了给出上面提到的一般理论的一个简单介绍以外, 在本章中我们还试图给出第 III 章中称为 "柔性映射" (也就是说, 可能具有 "线性依赖于大范数" 的估计) 的两个最基本例子: 乘积与复合.

这种类型的估计对于解决几乎所有非线性问题都是至关重要的, 我们将看到这也是 Nash–Moser 定理的一个基本假设.

II.B "微局部分析" 介绍了一些已经成为经典的内容 (波前集, 微局部椭圆正则性), 这些在 Hörmander [H4] 中有很好的叙述. 关于这一课题的综述可以参阅: Nirenberg 的专著 [N] 和 Hörmander 在*l'Enseignement mathématique*上发表的文章 [H2]. 这里的处理方式是对频率作锥形截断, 目的是区分 "好的" 和 "坏的" 谱方向.

事实上, II.A 和 II.B 对应于 (第 I 章中的) 经典拟微分演算理论中分拆余切丛的两种方法: 根据 $|\xi|$ 的大小分拆, 和 $\xi \in S^{n-1}$ 根据作锥形拆分.

II.B 中介绍的是 1970 年代的微局部分析: 亚椭圆性和线性算子奇性的传播; 基本上这就是 Hörmander 的著作 [H5] 中讨论的课题.

从那以后, Bony 的仿微分运算及其后续工作使我们可以把一些基本结果 (椭圆正则性, 奇性的传播) 推广到非线性方程的情形.

最后, 对于某些非线性问题, 我们需要对 (余切丛上的) 函数在其奇点附近作更为精细的局部化: 这就是所谓二次微局部分析. 有兴趣的读者可以参阅 Lebeau ([L], 对解析函数的情形) 或 Bony (对 Sobolev 空间的情形) 的文章.

II.C "能量估计" 主要处理的是能量不等式. 它们是处理双曲方程及奇点传播的主要工具. 我们再一次从 Hörmander 的著作 [H5] 里汲取了主要内容, 在那里还讨论了这一技术在混合问题中的应用.

第 II 章习题

A.1. a) 设 $s \in \mathbb{R}$. 证明存在 $c_s > 0$ 使得对于任意的 $u \in H^s$,

$$\frac{1}{c_s}|u - S_p u|_s^2 \leqslant \sum_{q \geqslant p} 4^{qs}|u_q|_0^2 \leqslant c_s|u - S_p u|_s^2,$$

并由此导出 $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} H^t$ 在 H^s 中是稠密的.

b) 设 α 是一个正的非整数. 我们记 $m = E(\alpha)$ (α 的整数部分), $\rho = \alpha - m$ (α 的小数部分). 证明存在 C_α 使得对于任意的 $u \in C^\infty$,

$$\frac{1}{C_\alpha}\|u - S_p u\|_\alpha \leqslant \sup_{q \geqslant p} 2^{q\alpha}\|u_q\|_0 \leqslant C_\alpha\|u - S_p u\|_\alpha,$$

并由此导出 $\bigcap_{\gamma \in \mathbb{R}} C^\gamma$ 在 C^α 中不是稠密的. 在本习题余下的部分中, 我们希望能够用条件: 当 $\delta \to 0$ 时

$$\sum_{|\beta|=m} \sup_{\substack{(x,\,h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\\ |h| \leqslant \delta}} \frac{|\partial^\beta u(x+h) - \partial^\beta u(x)|}{|h|^\rho} \to 0, \tag{$*$}$$

来刻画 $\bigcap_{\gamma \in \mathbb{R}} C^\gamma$ 在 C^α 中的闭包.

c) 直接验证 $\bigcap_{\gamma \in \mathbb{R}} C^\gamma$ 在 C^α 中的闭包里的任意函数 u 满足条件 ($*$).

d) 回到性质 A.1.3. i) 的证明. 证明对于任意的 $u \in C^\infty$,

$$\forall q \geqslant 0,\ \|u_q\|_0 \leqslant C2^{-q\alpha}\int|\tilde{\varphi}(y)|\sum_{|\beta|=m} \sup_{\substack{(x,\,h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\\ |h| \leqslant 2^{-q}|y|}} \frac{|\partial^\beta u(x+h) - \partial^\beta u(x)|}{|h|^\rho}\,\mathrm{d}y.$$

由此得到, 若 u 满足 ($*$), 则 $\|u - S_p u\|_\alpha \to 0$.

A.2. (Sobolev **嵌入的极限情形**) a) 验证 L^1 不包含在 $H^{-n/2}$ 内. (我们可以假设相反的情况, 然后证明, 如果这样的话Dirac 质量就是 $H^{-n/2}$ 的一个元素了). 由此推出 $H^{n/2}$ 不包含在 L^∞ 内.

b) 对 $k \in \mathbb{N}$, 定义

$$W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^\infty(\mathbb{R}^n),\, \partial^\alpha u \in L^\infty(\mathbb{R}^n),\, |\alpha| \leqslant k\}.$$

证明对于 $s = \dfrac{n}{2} + k$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ 不被包含在 $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 之内. (我们注意到任意函数 $u \in H^s$ ($s \in \mathbb{R}$) 都可以写成

$$u = u_0 + \sum_{j=1}^n \partial_j u_j,\ \text{其中}\ u_1, \cdots, u_n \in H^{s+1},\ \text{且}\ u_0 \in \bigcap_{t \in \mathbb{R}} H^t.\Big)$$

A.3.* Zygmund 类 我们记

$$C^1_*(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \sup_{(x,\,h)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|u(x+h)+u(x-h)-2u(x)|}{|h|} < +\infty \right\}.$$

我们现在利用二进分解来刻画 C^1_*.

a) 证明, 若 $u \in C^1_*(\mathbb{R}^n)$ 而 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ 是一个偶函数, 则 $u_p = \varphi(2^{-p}D)u$ 满足 $\sup\limits_{p\geqslant 0} \|u_p\|_0 \cdot 2^p < +\infty$.

b) 现在我们去掉 a) 中所作的关于 φ 是一个偶函数的假设. 证明结论仍然成立. (我们可以写 $u_p = \varphi(2^{-p}D)\tilde{u}_p$, 而对于适当的 $\tilde{\varphi}$, $\tilde{u}_p = \tilde{\varphi}(2^{-p}D)u$).

c) 设 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 并设 $u = \sum_{p\geqslant -1} u_p$ 是 u 的一个二进分解. 假设

$$\sup_{p\geqslant -1} \|u_p\|_0 \cdot 2^p < +\infty.$$

仿照性质 A.1.3. ii), 证明 $u \in C^1_*$. (我们可以注意到

$$|v(x+h)+v(x-h)-2v(x)| \leqslant 常数 \cdot |h|^2 \sup_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha v\|_0.)$$

d) 证明推广的 Sobolev 嵌入 $H^{n/2+1}(\mathbb{R}^n) \subset C^1_*(\mathbb{R}^n)$.

e) 利用习题 A.2., 证明包含关系 $W^{1,\infty} \subset C^1_*$ 是严格的.

A.4. (**插值**) 设有三个实数 $s_0 < s < s_1$. 设 $(v_q)_{q\geqslant 0}$ 是 H^{s_1} 中序列, 满足

$$\forall q \geqslant 0, \quad |v_q|_{s_0} \leqslant Cc_q 2^{-q(s-s_0)};\ |v_q|_{s_1} \leqslant Cc_q 2^{q(s_1-s)},$$

其中

$$\sum_{q\geqslant 0} c_q^2 \leqslant 1,$$

a) 证明对于任意的 $s' < s$, 级数 $\sum\limits_{q\geqslant 0} |v_q|_{s'}$ 收敛. 证明 $v = \sum\limits_{q\geqslant 0} v_q$ 是 H^s 中元素, 且 $|v|_s \leqslant 常数 \cdot C$.

b) 证明我们有分解 $v_q = a_q + b_q$, 满足

$$\operatorname{supp} \hat{a}_q \subset \{\xi,\, |\xi| \leqslant 2^{q+1}\}, \quad \operatorname{supp} \hat{b}_q \subset \{\xi,\, |\xi| \geqslant 2^q\},$$
$$|a_q|_{s_0} \leqslant 常数 \cdot Cc_q 2^{-q(s-s_0)}, \quad |b_q|_{s_1} \leqslant 常数 \cdot Cc_q 2^{q(s_1-s)}.$$

c) 估计二进部分和 $\sum\limits_{q\geqslant 0} a_q, \sum\limits_{q\geqslant 0} b_q$ 的 L^2 范数, 证明 $\sum\limits_{q\geqslant 0} a_q, \sum\limits_{q\geqslant 0} b_q \in H^s$, 总结.

d) 这一结果与引理 A.2.2 的结论有什么联系?

e) 证明如果把条件 $(*)$ 换成:

$$\forall q \geqslant 0, \quad |v_q|_{s_0} \leqslant Cc_q A^{-q(s-s_0)};\ |v_q|_{s_1} \leqslant Cc_q A^{q(s_1-s)},$$

结论不变,其中 $\sum_{q\geqslant 0} c_q^2 \leqslant 1$, $A>1$. (我们可以定义 A- 进分解并应用之).

f) 应用. 设 t_0, t_1, s_0, s_1 是四个实数, 并设 $T: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ 是一个从 H^{t_i} 到 H^{s_i}(对 $i=0,1$) 的有界线性算子. 设 $\theta \in (0,1)$; 我们记 $t=\theta t_0+(1-\theta)t_1$; $s=\theta s_0+(1-\theta)s_1$. 证明 T 是 H^t 到 H^s 的有界算子. (考虑 u 的二进分解 $u=\sum u_p$, 估计 $|Tu_p|_{s_i}$).

注　习题 A.4 在 Hölder 空间的框架下也成立.

A.5. 设 $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 我们用等式

$$T_a u = \sum_{p\geqslant 2} S_{p-2}a \cdot u_p$$

来定义 "与 a 作仿积"(这里我们用二进分解的常用记号, 参见 II.A.1.1 节).

a) 证明对于任意的 $s \in \mathbb{R}, T_a$ 在 H^s 上都是有界的; 而对于任何的非整数 $\alpha>0$, T_a 在 C^α 上也是有界的, 且算子范数为常数 $\cdot \|a\|_0$ 所控制.

b) 设 $a \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s<n/2$. 证明

$$\|S_p a\|_0 \leqslant C 2^{p((n/2)-s)},$$

并由此推出由上式定义的 T_a 对于任意的 $r \in \mathbb{R}$ 都是从 H^r 到 $H^{r+s-n/2}$ 的连续算子.

c) 设 s, t 为两个满足 $s+t>n/2$ 的任意实数. 设 $a \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $b \in H^t(\mathbb{R}^n)$. 证明 $ab=T_a b+T_b a+R$, 其中 $R \in H^{s+t-n/2}(\mathbb{R}^n)$ (我们可以利用引理 A.2.1). 根据 s, t 和 $s+t$ 的值讨论乘积 ab 的 H^r 正则性.

A.6. 设 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $f(0)=0$, 且对于任意 $k \geqslant 1$, $f^{(k)}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是有界的. 我们要证明, 若 $u \in H^{n/2}(\mathbb{R}^n)$, 则 $f(u) \in H^{n/2}(\mathbb{R}^n)$.

a) 对于 $u \in H^{n/2}(\mathbb{R}^n)$, 证明

$$\forall \alpha, \quad |\alpha|>0, \ \|\partial^\alpha S_p u\|_0 \leqslant C_\alpha 2^{p|\alpha|}.$$

证明 $m_p=\int_0^1 f'(S_{p-1}u+tu_p)\,\mathrm{d}t$ 是 "Meyer 乘子", 并根据性质 A.2.2 的证明作出总结.

b) 证明, 对于 $s>n/2$, $|f(u)|_s \leqslant C_s|u|_s$, 其中 C_s 只和 $|u|_{n/2}$ 有关. (与性质 A.2.2. 比较).

A.7.* 设 $(m_p)_{p\geqslant 0}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上一列满足

$$\forall p, \forall \alpha, \quad \|\partial^\alpha m_p\|_0 \leqslant C_\alpha 2^{p|\alpha|}$$

的 C^∞ 函数. 设函数 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\operatorname{supp}\varphi \subset \{\xi, 1/4 \leqslant |\xi| \leqslant 4\}$.

a) 证明由

$$a(x,\, \xi) = \sum_{p=0}^{\infty} m_p(x)\varphi(2^{-p}\xi)$$

定义的函数是一个 $S^0_{1,\,1}$ 类象征, 即该函数满足:

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\,\beta}(1+|\xi|)^{|\alpha|-|\beta|}.$$

b) 设 $b \in S^0_{1,\,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. 证明我们有等式

$$b(x,\, \xi) = b_{-1}(x,\, \xi) + \sum_{p=0}^{\infty} b_p(x,\, 2^{-p}\xi),$$

其中

$$\forall p \geqslant -1,\ b_p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n),\ \text{且在}\ \operatorname{supp} b_{-1}\ \text{上}\ |\xi| \leqslant 1,$$
$$\text{对}\ p \geqslant 0,\ \text{在}\ \operatorname{supp} b_p\ \text{上}\ 1/2 \leqslant |\xi| \leqslant 2,$$

而

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_p(x,\, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\,\beta} 2^{p|\alpha|}.$$

由此推出

$$b(x,\, \xi) = b_{-1}(x,\, \xi) + \int_{\mathbb{R}^n} a(x,\, \xi,\, y)\, \mathrm{d}y,$$

其中对于任意的 y, $a(x,\, \xi,\, y) = \sum_{p=0}^{\infty} m_p(x,\, y)\Phi(2^{-p}\xi,\, y)$ 是 a) 中讨论过的类型, 且

$$\forall p,\, \forall \alpha,\, \forall N,\ |\partial_x^\alpha m_p| \leqslant C_{\alpha,\,N} 2^{p|\alpha|}(1+|y|)^{-N}$$
$$\forall \alpha,\ |\partial_\xi^\alpha \Phi| \leqslant C_\alpha (1+|y|)^{|\alpha|}.$$

c) 证明若 $b \in S^0_{1,\,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, 则对于任意 $s > 0$, $b(x,\, D)$ 在 H^s 上都是有界的. (利用 b) 将问题归结到性质 A.2.2).

d) 用类似的办法证明对于任意非整数 $\alpha > 0$, $b(x,\, D)$ 在 C^α 上是有界的.

注 $S^0_{1,\,1}$ 类拟微分算子在 Sobolev 空间上的连续性是一个复杂的问题; 一般说来这些算子在 L^2 上不是有界的 (参见 [CM], pp. 39–40). 读者可以在 [H8] 中看到对于这一类型问题的比较新的讨论.

B.1. 设 S 是超曲面 $\{x_1 = 0\}$, 并设函数 u 具有形式

$$u(x) = u_+(x) \cdot 1_{\{x_1>0\}} + u_-(x) \cdot 1_{\{x_1<0\}},$$

其中 u_+, u_- 是 $\mathbb{R}^n$ 上 C^∞ 函数, 满足 $\forall x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $u_+(0,\, x') \neq u_-(0,\, x')$.

a) 证明 $WF(u)=\{(0,x',\xi_1,0),\xi_1\neq 0,x'\in\mathbb{R}^{n-1}\}$. 利用波前集在微分同胚下的不变性,将 S 是任意超曲面时的相应结果内蕴地表达出来 (和例 B.2.1.2 比较).

b) 设 $P=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)D^\alpha$ 是一个 C^∞ 系数的微分算子. 具体计算 $Pu(x)$; 并由此导出若 $Pu\in C^\infty$, 则 S 是 P 的特征曲面 (即对于任意 $x\in S$ 和在 x 处与 S 垂直的 $\xi, p_m(x,\xi)=0$, 其中 p_m 是 P 的主象征). 我们可以预料到这个结果么?

B.2.(**构造具有给定波前集的分布**) 设 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\int\varphi(x)\,\mathrm{d}x=1$, 并设 $\alpha\in(0,1)$.

a) 对于 $k\geqslant 1$, $\xi\in S^{n-1}$, $x\in\mathbb{R}^n$, 我们记

$$\varphi_k(x,\xi)=k^{n\alpha}\varphi(k^\alpha x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot\xi}.$$

证明 φ_k 关于 x 的 Fourier 变换满足

i) 若 η 在一个与 $\mathbb{R}_+^*\xi$ 不交的锥体 Γ 中, 则 $\forall N$, $|\hat\varphi_k(\eta,\xi)|\leqslant C_N(1+|\eta|)^{-N}$, 其中 C_N 依赖于 Γ.

ii) $\hat\varphi_k(k\xi,\xi)=1$.

b) 在这一问中假设 $\hat\varphi\geqslant 0$, 并设 $\xi_0\in S^{n-1}$. 证明函数

$$u(x)=\sum_{k=1}^\infty k^{-n\alpha-2}\varphi_k(x,\xi_0)$$

在 $\mathbb{R}^n$ 上连续且具有紧支集,且

$$\Sigma(u)=\{\xi_0\},\ \ WF(u)=\{(0,t\xi_0),t>0\}.$$

c) 设 F 是 $\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ 的一个锥形闭子集; 记 $F_1=F\cap(\mathbb{R}^n\times S^{n-1})$ 并取 F_1 中的一个稠密序列 $(x_k,\xi_k)_{k\geqslant 1}$. 证明函数

$$u(x)=\sum_{k=1}^\infty k^{-n\alpha-2}\varphi_{k^2}(x-x_k,\xi_k)$$

是连续的, 且满足 $WF(u)=F$. (我们可以注意到, 若 $k\neq j$, $\xi\in S^{n-1}$, $\eta\in S^{n-1}$, 则对于任意的 N,

$$|\hat\varphi_{k^2}(j^2\xi,\eta)|\leqslant C_Nj^{-N};$$

由此导出, 若 $\theta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $x=x_j$ 附近满足 $\theta(x)=1$, 则对于充分大的 j,

$$|\widehat{\theta u}(j^2\xi_j)|\geqslant\frac{1}{2}j^{-2n\alpha-2}.)$$

B.3. 证明若 u 是实值分布, 则由 $(x,\xi)\in WF(u)$ 可以推出 $(x,-\xi)\in WF(u)$.

B.4.(**迹的微局部研究**) 设 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t)$,满足 $WF(u) \cap \{t=0, \xi=0\} = \varnothing$.

a) 证明若 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_t)$ 的支集在 $t=0$ 的一个足够小的邻域内, 则积分

$$I(\varphi) = \int \hat{v}(0, \tau)\frac{\mathrm{d}\tau}{2\pi}, \text{ 其中 } v = (\psi \otimes \varphi)u,$$

对于任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_x)$ 都是收敛的, 且不依赖于 ψ 的选择 (如果我们要求在 $t=0$ 的邻域内 $\psi = 1$). 由此该积分定义了 $\mathbb{R}^n$ 上的一个分布 Tu.

b) 验证,如果加上条件 $u \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_x))$, 我们可以得到 $Tu = u|_{t=0}$.

c) 利用波前集的定义证明

$$WF(Tu) \subset \{(x, \xi), \exists\tau, (x, 0, \xi, \tau) \in WF(u)\}.$$

B.5. 本题中给出性质 B.2.2.2 和推论 B.2.2.1 的一个不依赖于 B 部分中引用的一般性定理的证明.

a) 设 $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. 证明若

$$\mathrm{d}(x, \operatorname{supp} v) \geqslant c > 0, \quad \text{则} \quad \forall\alpha, \forall\beta, \ |x^\alpha \partial_x^\beta a(x, D)v| \leqslant C_{\alpha,\beta}.$$

由此得到,若 $a(x, D)v \in C^\infty$, 则 $a(x, D)v \in \mathcal{S}$.

b) 证明 $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$ 当且仅当存在一个在 x_0 非零的函数 $\varphi(x) \in C_0^\infty$ 和在 ξ_0 椭圆的 $\chi(\xi) \in S^0$, 使得 $\chi(D)(\varphi u) \in C^\infty$.

c) 对象征 a, 我们定义 a 的本性支集 (记为 $ES(a)$) 为 $T^*\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 中满足下述条件的点 (x_0, ξ_0) 全体: (x_0, ξ_0) 没有任何一个锥形邻域 Γ 使得 $a \in S^{-\infty}(\Gamma)$. 对于 $A = a(x, D)$, 我们仍然记 $ES(A) = ES(a)$. 证明 $ES(AB) \subset ES(A) \cap ES(B)$.

d) 证明对于 $(x_0, \xi_0) \notin ES(A)$, 存在 χ 和 φ 使得 $\chi(D)\varphi$ 在 (x_0, ξ_0) 是椭圆的,且 $ES(\chi(D)\varphi) \cap ES(A) = \varnothing$. 并由此证明性质 B.2.2.2.

e) 利用等式

$$A = A\chi(D)\varphi + A(1 - \chi(D)\varphi),$$

和性质 B.2.2.2 来证明推论 B.2.2.1,其中 φ 在 x_0 附近取值为 1, 而 χ 在 ξ_0 的一个锥形邻域中取值为 1.

B.6. 设 $s \in \mathbb{R}$. 若 $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 我们用 $\Sigma^s(v)$ 来表示 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 中满足下列条件的 ξ 全体: ξ 没有任何锥形邻域 Γ 使得 $(1+|\eta|^2)^{s/2}\hat{v}(\eta) \in L^2(\Gamma)$. 若 X 是 $\mathbb{R}^n$ 中开集, $x \in X$ 而 $u \in \mathcal{D}'(X)$, 我们可以按照和 II.B.1.1 节中相同的处理方法定义 $\Sigma_x^s(u)$ 和 $WF_s(u)$ (u 的 H^s 波前集)(利用引理 B.1.1.1 的一个显然的推广).

a) 刻画 $WF_s(u)$ 在 X 上的投影.

b) 证明 $WF(u)$ 等于 $\bigcup\limits_{s\in\mathbb{R}} WF_s(u)$ 的闭包. (我们可以先证明如下事实,如果对于 $v \in \mathcal{E}'$ 和一个开锥形 Γ 有 $\bigcup\limits_s \Sigma^s(v) \cap \overline{\Gamma} = \varnothing$,那么对于任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 和任意满足 $\overline{\Gamma}_1 \subset \Gamma$ 的开锥形子集 Γ_1,我们都有 $\Sigma(\varphi v) \cap \overline{\Gamma}_1 = \varnothing$),

c) 证明 $(x_0, \xi_0) \notin WF_s(u)$ 当且仅当我们有分解 $u = u_1 + u_2$,其中 $u_1 \in H^s_{\mathrm{loc}}(X)$[①], $(x_0, \xi_0) \notin WF(u_2)$.

d) 证明若 P 是 X 上一个 m 阶恰当支撑算子, 则

$$WF_s(Pu) \subset WF_{s+m}(u) \subset WF_s(Pu) \cup \operatorname{char}(P).$$

e) 在 d) 的假设下, 设 $m > 0$. 证明若对于任意的 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $P^k u \in L^2_{\mathrm{loc}}(X)$, 则 $WF(u) \subset \operatorname{char}(P)$.

B.7* (Rauch **引理**: **参见** [Ra]) 设 $s > n/2$,并设 $u, v \in H^s_{\mathrm{loc}}(X)$. 我们来证明对于任意的 $t \leqslant 2s - n/2$,有

$$WF_t(uv) \subset WF_t(u) \cup WF_t(v).$$

a) 证明我们只需验证: 若 $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ 具有紧支集且 $t \leqslant 2s - n/2$, 则 $\Sigma^t(uv) \subset \Sigma^t(u) \cup \Sigma^t(v)$.

b) 在问题 a) 的假设下. 记 $(1 + |\xi|^2)^{1/2} = \langle\xi\rangle$. 设 Γ 是一个开锥体, 满足 $\langle\xi\rangle^t u, \langle\xi\rangle^t v \in L^2(\Gamma)$. 对于一个待定的 $c \in (0, 1)$,我们做分解

$$\widehat{uv} = w_1 + w_2 + r, \quad w_1(\xi) = \int_{|\xi-\eta|<c|\eta|} \hat{u}(\xi-\eta)\hat{v}(\eta)\,\mathrm{d}\eta,$$
$$w_2(\xi) = \int_{|\xi-\eta|>\frac{1}{c}|\eta|} \hat{u}(\xi-\eta)\hat{v}(\eta)\,\mathrm{d}\eta.$$

证明对于满足 $\overline{\Gamma}_1 \subset \Gamma$ 的开锥体 Γ_1 和一个适当的 c, 对于 $i = 1, 2$ 我们有 $\langle\xi\rangle^t w_i \in L^2(\Gamma_1)$. (我们可以证明

$$\langle\xi\rangle^t |w_i(\xi)| \leqslant C\left(\int |\hat{u}(\eta)|\,\mathrm{d}\eta\right)^{1/2}\left(\int_\Gamma |\hat{u}(\xi-\eta)|\,|\hat{v}(\eta)|^2\,\mathrm{d}\eta\right)^{1/2}.)$$

c) 注意到对于适当的正数 c_1, c_2,我们有

$$|r(\xi)| \leqslant \left(\int_{|\eta_1|\geqslant c_1|\xi|} |\hat{u}(\eta_1)|^2\,\mathrm{d}\eta_1\right)^{1/2}\left(\int_{|\eta_2|\geqslant c_2|\xi|} |\hat{v}(\eta_2)|^2\,\mathrm{d}\eta_2\right)^{1/2},$$

由此得出 $\langle\xi\rangle^{2s-n/2} r \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (和习题 A.5.c) 做比较).

B.8* 设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 中开集, 而 $\mathcal{V}$ 是 X 上一族 C^∞ 向量场. 定义

$$H^{s,\infty}(\mathcal{V}) = \{u \in H^s_{\mathrm{loc}}(X),\ Z_1 \cdots Z_k u \in H^s_{\mathrm{loc}}(X)$$
$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall Z_1, \cdots, Z_k \in \mathcal{V}\}.$$

[①] $H^s_{\mathrm{loc}}(X) = \{f,$ 对任意的 $\varphi \in C_0^\infty(X), \varphi f \in H^s(X)\}$.

记 $\mathcal{V}$ 生成的 Lie 代数为 $\hat{\mathcal{V}}$,并定义

$$\mathcal{N}(\mathcal{V})=\{(x,\,\xi)\in T^*X\setminus\{0\},\,\langle\xi,\,Z(x)\rangle=0,\ \forall Z\in\hat{\mathcal{V}}\}.$$

a) 证明若 $u\in H^{s,\infty}(\mathcal{V})$, 则 $WF(u)\subset\mathcal{N}(\mathcal{V})$.

b) 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中超曲面; 取 $\mathcal{V}$ 为和 S 相切的向量场全体. 给出问题 a) 的结果在这一情形下的具体意义. 给出 $H^{s,\infty}(\mathcal{V})$ 的元素的例子. (考虑习题 B.1. 中的 "分片 C^∞" 分布).

c) 假设 $s>n/2$. 证明若 $u\in H^{s,\infty}(\mathcal{V})$, 则 $f(u)\in H^{s,\infty}(\mathcal{V})$.

B.9.* 设 $I_\varphi(a)=\displaystyle\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x,\,\theta)}a(x,\,\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 是一个振荡积分分布 (定义参见第 I 章习题 4.6.b)).

a) 设 $\psi=\psi(x)$ 是 Ω 上的实值 C^∞ 函数, 在 Ω 上满足 $\mathrm{d}\psi\neq 0$ 且 $\forall x\in\Omega,\,\forall\theta\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$,

$$\mathrm{d}_\theta\varphi(x,\,\theta)=0\Rightarrow \mathrm{d}\psi(x)\neq \mathrm{d}_x\varphi(x,\,\theta).$$

证明对于 $\Omega\times\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ 的任意紧子集 K, 存在常数 $C>0$ 使得 $\forall\lambda\geqslant 0,\,\forall R\geqslant 0,\,\forall(x,\,\theta)\in K$,

$$R|\,\mathrm{d}_\theta\varphi(x,\,\theta)|+|R\,\mathrm{d}_x\varphi(x,\,\theta)-\lambda\,\mathrm{d}\psi(x)|\geqslant C(R+\lambda).$$

由此推出若 $u\in C_0^\infty(\Omega)$,则对于任意的 $\lambda\geqslant 1$,

$$|\langle I_\varphi(a),\,u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\psi}\rangle|\leqslant C_N\lambda^{-N}.$$

(我们可以如同第 I 章附录中定理 1 的证明那样,考虑 $a=\sum\limits_p a\chi(2^{-p}\theta)$, 并应用那里的 "非驻相引理").

b) 证明 $WF(I_\varphi(a))\subset\{(x,\,\mathrm{d}_x\varphi(x,\,\theta)),\,\mathrm{d}_\theta\varphi(x,\,\theta)=0\}$.

C.1. 在本题中我们将对双曲问题解的存在性的结果 (性质 C.1.2) 给出一个略为不同的证明. 我们将不采用 "对偶性" 方法, 而是用一族常微分方程组来逼近问题的解.

我们用性质 1.2 里的假设. 对 $\varepsilon\in(0,\,1)$,我们记 $\rho_\varepsilon=(1+\varepsilon|D|)^{-1}$ 和 $a_\varepsilon(t,\,x,\,D)=\rho_\varepsilon a(t,\,x,\,D)$. 我们在 H^s 中用函数族 (φ_ε) 逼近 φ, 在 $L^1([0,\,T];H^s)$ 中用 $\mathcal{S}$ 内的函数族 (f_ε) 逼近 f.

a) 证明对于任意 $\varepsilon>0$ 和任意的 $r\in\mathbb{R}$, 方程

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}+a_\varepsilon(t,\,x,\,D)u_\varepsilon=f_\varepsilon,\quad u_\varepsilon(0,\,x)=\varphi_\varepsilon(x),$$

有且只有一个解 $u_\varepsilon\in C^1([0,\,T];H^r)$.

b) 应用双曲能量不等式, 利用第 I 章习题 5.10, 证明当 ε 趋于 0 时函数族 (u_ε) 在 $C([0,T];H^s)$ 中是有界的, 在 $C([0,T];H^{s-2})$ 中是 Cauchy 的. 由此得到最初的问题的一个解 $u\in C([0,T];H^{s-2})\cap L^2([0,T];H^s)$ 的存在性.

就像在性质 C.1.2 的证明结尾处一样,并利用 (另外单独证明的) 唯一性, 我们得到 $u\in C([0,T];H^s)$.

C.2.(**波动方程**) 设 $\varphi_0\in H^s(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_1\in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$. 我们来对 $u\in C(\mathbb{R},H^s)\cap C^1(\mathbb{R},H^{s-1})$ 求解 Cauchy 问题

$$(\partial_t^2-\Delta)u=0,\ \ u|_{t=0}=\varphi_0,\ \ \partial_t u|_{t=0}=\varphi_1, \tag{1}$$

并研究 u 的微局部正则性. 考虑由

$$\widehat{(|D|v)}(\xi)=|\xi|\hat{v}(\xi)$$

对 $v\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 定义的算子 $|D|$.

这个算子按照第 I 章 I.3 节的定义严格说来并不是拟微分的: 我们让读者自行验证这个细节对于下面的结果没有影响.

a) 设 u 是 (1) 的一个具有我们要求的正则性的解, 记 $v_+=(\partial_t+\mathrm{i}|D|)u$, $v_-=(\partial_t-\mathrm{i}|D|)u$. 证明 $v_\pm\in C(\mathbb{R},H^{s-1})$ 是方程

$$(\partial_t\mp\mathrm{i}|D|)v_\pm=0,\ \ v_\pm|_{t=0}=\varphi_1\pm\mathrm{i}|D|\varphi_0 \tag{2}$$

的解, 而 u 满足

$$\partial_t u=\frac{v_++v_-}{2},\ \ u|_{t=0}=\varphi_0. \tag{3}$$

由此推出问题 (1) 的解的唯一性.

b) 对于存在性, 证明借助于 a) 的结果我们可以解问题 (2),且 (3) 定义了一个函数 $u\in C^1(\mathbb{R},H^{s-1})$, 满足 $\mathrm{i}|D|u=(v_+-v_-)/2$. 由此推出 u 是 (1) 的解,且具有我们需要的正则性.

c) 证明对于任意的 t,

$$WF(v_\pm(t))=\left\{\left(x\mp t\frac{\xi}{|\xi|},\,\xi\right),\,(x,\xi)\in WF(\varphi_1\pm\mathrm{i}|D|\varphi_0)\right\},$$

并证明 $WF(u(t))\subset WF(v_+(t))\cup WF(v_-(t))$, 且当后两个集合不交时等号成立. 和例 B.2.1.3 做比较.

d) 证明 v_+,v_- 是波动方程的解, 由此 (利用习题 B.4) 推出

$$WF(v_\pm)=\left\{\left(x\mp t\frac{\xi}{|\xi|},\,t,\,\xi,\,\pm|\xi|\right),\,t\in\mathbb{R},\,(x,\xi)\in WF(\varphi_1\pm\mathrm{i}|D|\varphi_0)\right\}.$$

最后,证明 $WFu=WF(v_+)\cup WF(v_-)$.

C.3* (Hörmander **定理**) a) 设 $a = a(x, \xi) \in S^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ 是实值的且其主象征为 $a_1(x, \xi)$. 设 $u \in \bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^n)$. 设 $f = a(x, D)u \in \cap_{s\in\mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^n)$. 注意到函数 $v(t, x) = u(x)$ $(t \in \mathbb{R})$ 是

$$(\partial_t + \mathrm{i}a(x, D))v = \mathrm{i}f \quad (\forall s,\ f \in C^\infty(\mathbb{R}_t, H^s))$$

的解. 证明若 $(x, \xi) \in WF(u)$, 则 $\chi_t(x, \xi) \in WF(u)$.

对任意的 $t \in \mathbb{R}$,我们定义

$$\chi_t(y, \eta) = (x(t), \xi(t)), \text{其中 } \dot{x}(t) = \frac{\partial a_1}{\partial \xi}(x(t), \xi(t)),$$
$$\dot{\xi}(t) = -\frac{\partial a_1}{\partial x}(x(t), \xi(t)),$$
$$x(0) = y, \quad \xi(0) = \eta.$$

(验证当方程的右端是一个光滑函数的时候性质 C.1.3. 仍然是成立的).

b) 设 P 是 $\mathbb{R}^n$ 中开集 X(或一个微分流形) 上的 m 阶恰当支撑拟微分算子. 设主象征 p_m 是实的. 设 $u \in \mathcal{D}'(X)$ 使得 $Pu \in C^\infty(X)$. 证明 $WF(u)$ 是 p_m 的一族双特征 (即 H_{p_m} 的和 $p_m = 0$ 相关联的积分曲线) 的并集.

提示 首先和 a) 一样利用截断函数把问题简化为全空间 $\mathbb{R}^n$ 的情形, 再通过把 P 乘上一个 $1 - m$ 阶椭圆算子的办法把问题简化到一阶算子的情形.

c) 将 b) 中陈述的结果应用到 P 是向量场 $P = \partial_t^2 - \Delta$ 的情形. (与习题 C.2 的最终结论作比较).

d) 在带状区域 $B = \{-1 < x < 1, y \in \mathbb{R}\}$ 考虑 $P = \partial_x^2 + x\partial_y^2$. 设 $u \in \mathcal{D}'(B)$ 满足 $Pu \in C^\infty(B)$. 设对于某个 $c \in (0, 1)$, u 在 $\{x = -c\}$ 的附近是 C^∞ 的. 证明 $u \in C^\infty(B)$.

C.4. 设 $P(x, t, D_x, D_t) = \sum_{j=0}^m P_j(t, x, D_x)D_t^j$ 是一个 m 阶微分算子. 记其象征为

$$p(x, t, \xi, \tau) = \sum_{j=0}^m p_j(t, x, \xi)\tau^j;$$

并设 $p_m = 1$,且方程 $p(x, t, \xi, \tau) = 0$ 关于 τ 的根两两不同 (记作 $\tau_1(t, x, \xi), \cdots, \tau_m(t, x, \xi)$).

我们来证明存在 C^∞ 依赖于 t 的关于 (x, ξ) 的古典一阶象征 $\lambda_1(t, x, \xi), \cdots, \lambda_m(t, x, \xi)$, 满足:

$$P = (D_t - \lambda_1(t, x, D_x)) \cdots (D_t - \lambda_m(t, x, D_x)) + R,$$

其中 $R(x, t, D_x, D_t) = \sum_{j=0}^{m-1} R_j(t, x, D_x)D_t^j$ 且 $R_j \in S^{-\infty}$.

a) 记

$$q_j(x, t, \xi, \tau) = \prod_{k\neq j}(\tau - \tau_k(t, x, \xi)).$$

证明,若

$$a(x, t, \xi, \tau) = \sum_{j=0}^{m-1} a_j(t, x, \xi)\tau^j$$

对 (ξ, τ) 是 l 次齐次的,我们可以写

$$a = \sum_{j=1}^{m} b_j(t, x, \xi)q_j(x, t, \xi, \tau),$$

其中 b_j 对 ξ 是 $l-m+1$ 次齐次的.(给出 b_j 的具体表达式).

b) 验证 II.C.2 节开头的论断:

$$P = (D_t - \tau_1(t, x, D_x)) \cdots (D_t - \tau_m(t, x, D_x)) + R_{m-1},$$

其中 $R_{m-1}(x, t, D_x, D_t) = \sum_{j=0}^{m-1} R_{m-1,j}(t, x, D_x)D_t^j$ 且 $R_{m-1,j}$ 是 $m-1-j$ 阶古典拟微分算子. 证明存在古典象征 $\sigma_{1,0}(t, x, \xi), \cdots, \sigma_{m,0}(t, x, \xi) \in S^0$, 使得

$$P = (D_t - \tau_1(t, x, D_x) - \sigma_{1,0}(t, x, D_x)) \cdots (D_t - \tau_m(t, x, D_x) - \sigma_{m,0}(t, x, D_x)) + R_{m-2},$$

其中 $R_{m-2}(x, t, D_x, D_t) = \sum_{j=0}^{m-1} R_{m-2,j}(t, x, D_x)D_t^j$ 且 $R_{m-2,j}$ 是 $m-2-j$ 阶古典的. 总结.

C.5. 设 $A = A(t, x, \xi) \in C^\infty([0, T], S^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n))$ 是一个取值在 m 阶复方阵的象征,C^∞ 地依赖于 t.

我们研究 Cauchy 问题

$$Lu \equiv (D_t - A(t, x, D_x))u = f, \quad u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}^n), \tag{1}$$

这里所有的函数都在 $\mathbb{C}^m$ 中取值,且假设 A 的主象征 $a_1(t, x, \xi)$ 的特征值都是实的且两两不同 (此即所谓严格双曲性).

a) 证明存在取值在 m 阶复方阵中的 0 阶椭圆的 $P = P(t, , x, \xi) \in C^\infty([0, T], S^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n))$ 使得

$$P(t, x, D_x)A(t, x, D_x)u = \Lambda(t, x, D_x)P(t, x, D_x)u + R(t, x, D_x)u,$$

其中

$$\Lambda(t, x, \xi) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t, x, \xi) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m(t, x, \xi) \end{pmatrix},$$

这里 λ_j 的主象征是 $a_1(t, x, \xi)$ 的特征值, 而余项 $R \in C^\infty([0, T], S^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n))$.

b) 证明存在常数 C 使得对于充分大的 λ,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \mathrm{e}^{-\lambda t}|Pu(t,\,\cdot)|_s \leqslant C\left(|\varphi|_s + \int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}(|Lu(t,\,\cdot)|_s + |u(t,\,\cdot)|_s)\,\mathrm{d}t\right).$$

由此推出能量不等式 (对一个不同的常数 C)

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \mathrm{e}^{-\lambda t}|u(t,\,\cdot)|_s \leqslant C\left(|\varphi|_s + \int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}|Lu(t,\,\cdot)|_s)\,\mathrm{d}t\right).$$

就像在性质 C.2.1 的证明结尾处一样, 我们有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \mathrm{e}^{-\lambda t}|u(t,\,\cdot)|_{s-1} \leqslant |\varphi|_{s-1} + 2\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}(|Lu(t,\,\cdot)|_{s-1} + C'|u(t)|_s)\,\mathrm{d}t.$$

基于和 II.C.1.2 节同样的理由, 证明 Cauchy 问题 (1) 的解的存在和唯一性.

C.6. 本题中我们将看到如何把一个 m 阶的数值双曲问题转化成一个习题 C.5 中考虑过的方程组. (这个方法是属于 A.P.Calderón 的).

设

$$P(x,\,t,\,D_x,\,D_t) = \sum_{j=0}^{m} P_j(t,\,x,\,D_x)D_t^j$$

是一个 m 阶数值微分算子, $P_m(t,\,x,\,\xi) = 1$.

a) 我们假设 $Pu = f$, 且对于 $j = 1,\cdots,m$ 有 $D_t^{j-1}u(0,\,x) = \varphi_j(x)$. 证明由

$$v_j = D_t^{j-1}\langle D\rangle^{m-j}u$$

定义的 $v = (v_1,\cdots,v_m)$(其中 $\langle D\rangle$ 具有象征 $(1+|\xi|^2)^{1/2}$) 是某个形如

$$(D_t - A(t,\,x,\,D_x))v = g, \quad v(0,\,x) = \psi(x),$$

的方程组的解, 把这个方程组具体地写出来.

b) 计算 $A(t,\,x,\,D_x)$ 的主象征 $A_1(t,\,x,\,\xi)$ 的特征多项式, 并由此得到, 若 P 是严格双曲的, 则 $D_t - A$ 按照习题 C.5 的意义也是严格双曲的. 由此利用习题 C.5 研究 P 的 Cauchy 问题.

C.7.* (**环面上的正对称组**) 本题基本上是从 J. Moser[Mo] 那里 “借” 来的. 在环面 $\mathbb{T}^n$ 上, 我们考虑一个 $m\times m$ 微分系统

$$L = \sum_{j=1}^{n} A_j(x)\partial_j + B(x),$$

并假设这里 A_j 都是 Hermite 的. 我们记

$$K(x) = \frac{B(x)+B(x)^*}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\partial_j A_j(x),$$

并作下述正定性假设:

$$\forall x \in \mathbb{T}^n,\ K(x) \geqslant c_0 I,\ c_0 > 0. \tag{P_0}$$

a) 证明对于任意函数 $u \in H^1(\mathbb{T}^n)$, 我们有

$$\operatorname{Re}(Lu,\, u) = (Ku,\, u). \tag{1}$$

证明如果我们仅仅假设 $u \in L^2$ 和 $Lu \in L^2$, 等式仍然是成立的. (应用第 I 章习题 5.10.b), Friedrich 引理).

由此推出估计 $|u|_0 \leqslant$ 常数 $\cdot |Lu|_0$, 并推出 $u \in L^2$ 和 $Lu = 0$ 蕴含了 $u = 0$.

b) 证明不等式 $|u|_0 \leqslant$ 常数 $\cdot |L^* u|_0$, 并导出, 对任意的 $f \in L^2$, 方程 $Lu = f$ 有且只有一个解 $u \in L^2$.

c) 我们以 $\langle D\rangle^s$ 记象征为 $(1+|\xi|^2)^{s/2}$ $(s>0)$ 的算子. 假设对某个 $c_s > 0$, 有

$$\forall \xi \in S^{n-1},\ K(x) + s \sum_{1 \leqslant j,\, k \leqslant n} \partial_k A_j(x) \xi_j \xi_k \geqslant c_s I, \tag{P_s}$$

证明估计

$$\forall u \in H^{s+1},\ \operatorname{Re}(\langle D\rangle^s Lu,\, \langle D\rangle^s u) \geqslant \frac{c_s}{2}|u|_s^2 - C|u|_0^2 \tag{2}$$

(计算 $[L,\, \langle D\rangle^s]$ 的主象征, 并应用 Gårding 不等式 (第 I 章性质 5.3)), 进而导出 $|u|_s \leqslant$ 常数 $\cdot\ |Lu|_s$.

d) 仍然假设 (P_s), 对 $f \in H^s$ 我们考虑 $Lu = f$ 的解 $u \in L^2$. 我们来证明 $u \in H^s$.

i) 对 $\varepsilon > 0$, 我们记 $L_\varepsilon = L - \varepsilon\Delta\mathrm{id}$, $\left(\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2\right)$. 采用和 a) 与 b) 同样的方式, 证明存在唯一的 $u_\varepsilon \in L^2$ 满足 $L_\varepsilon u_\varepsilon = f$. 证明当 ε 趋于 0 时 (u_ε) 在 L^2 中有界, 且存在一个子列弱收敛于 u.

ii) 证明对于任意的 $\varepsilon > 0, u_\varepsilon \in H^{s+2}$, 并利用估计 (2), 证明当 ε 趋于 0 时 (u_ε) 在 H^s 中有界. 总结得到的结果.

e) 验证只有当所有的 A_j 均是常数的时候条件 (P_s) 才有可能对所有的 s 成立.

f) 问题 e) 让我们可以预见到对于 $f \in C^\infty$, 方程 $Lu = f$ 的解的 H^s 正则性会有一定的局限性. 在 $\mathbb{T}^1$ 上具体计算下述方程的解 $u \in L^2$:

$$\left(-\sin x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + m\right) u = (\sin x)^m,$$

其中 $m > 1/2$, 证明上述理论给出的关于正则性的限制是最优的.

III 隐函数定理

这里我们给出若干扰动问题的例子, 根据 "导数缺失" 的严重程度来划分: 我们先讨论 "椭圆" 情形, 这时候只要用到常见的隐函数定理就足够了; 然后我们来看一些用某种不动点方法可以解决的问题 (包括等距嵌入问题); 最后我们考虑线性化方程具有 "柔性估计" 的情形, 这时我们就可以应用一种 Nash–Moser 技巧 (例如环面上向量场的扰动的研究).

III.A 隐函数定理和椭圆问题

III.A.1 Banach 空间上隐函数定理的回顾

III.A.1.1 局部逆映射定理

定理 1.1 设 $f: B_1 \supset U \to B_2$(其中 B_i 是 Banach 空间,U 是 B_1 中开集), 并设 f 在 U 上连续可微. 如果存在连续线性算子 $A: B_2 \to B_1$ 使得 $f'(x_0)A = \mathrm{id}_{B_2}$, 则存在一个在 $y_0 = f(x_0)$ 的一个邻域内 C^1 的映射 g, 使得 $f(g(y)) = y$. 若 $f'(x_0)$ 还是从 B_1 到 B_2 的同构, 则 f 是从 x_0 的某个邻域到 $f(x_0)$ 的某个邻域的 C^1 微分同胚.

证明 a) 先假设 $B_1 = B_2$, $f(x_0) = x_0, f'(x_0) = \mathrm{id}$. 这样我们把方程 $y = f(x)$ 写成 $x = x + y - f(x) \equiv h(x)$ 的形式, 然后通过计算序列 $x_{n+1} = h(x_n)$ 的极限来找 h 的不动点. 具体说来:

i) 对充分小的 $\delta > 0$ 和 $\|y - x_0\| \leqslant \delta/2$,我们有 $h: \overline{B(x_0, \delta)} \to \overline{B(x_0, \delta)}$; 事实上,

$$f(x) = f(x_0) + x - x_0 + o(\|x - x_0\|) = x + o(\|x - x_0\|),$$

这样

$$h(x) - x_0 = y - x_0 + o(\|x - x_0\|),\ \ \|h(x) - x_0\| \leqslant \delta(1/2 + \varepsilon(\delta)) \leqslant \delta.$$

ii) 若 $\|y - x_0\| \leqslant \delta/2$ 且 δ 足够小, 则 h 在 $\overline{B(x_0, \delta)}$ 上是收缩映射, 因为

$$\|h(x_1) - h(x_2)\| \leqslant \|x_1 - x_2\| \sup_{\|z - x_0\| \leqslant \delta} \|\mathrm{id} - f'(z)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

根据 i) 和 ii), h 在 $\overline{B(x_0, \delta)}$ 中有唯一不动点. 相应的, 对任意的 $y \in B(x_0, \delta/2)$, 方程 $f(x) = y$ 在 $\overline{B(x_0, \delta)}$ 中有唯一解. 因为 δ 可以任意小, 我们得到: x_0 的任意邻域在 f 下的像都是 x_0 的邻域.

b) 现在来考虑一般情况. 对 $\tilde{f}(y) = f(x_0 + A(y - y_0))$ 应用上述结论, 我们得到: x_0 的任意邻域在 f 下的像都是 y_0 的邻域. 设 Y 是以 y_0 为中心的半径充分小的开球, 满足

$$\sup_{y \in Y} \|\mathrm{id} - \tilde{f}'(y)\| < 1.$$

那么对于任意 $y \in Y$, $\tilde{f}'(y)$ 是可逆的, 这样,对 $y \in \tilde{f}$ 应用上述结论, 我们得到任何 Y 中开集在 $\tilde{f}$ 下的像是开的. 由在 a) 中已经用过的 Taylor 公式,$\tilde{f}$ 在 Y 上是单射, 它给出了一个从 Y 到 $\tilde{f}(Y)$ 的 C^1- 微分同胚. 记这个微分同胚为 $\tilde{g}$, 则 $g(y) = x_0 + A(\tilde{g}(y) - y_0)$ 就给出了我们要的 g.

c) 若 $f'(x_0)$ 是从 B_1 到 B_2 的微分同胚,则 A 是可逆的, 且根据 b),

$$f(x) = \tilde{f}(y_0 + A^{-1}(x - x_0))$$

定义了从 x_0 的一个邻域到 y_0 的一个邻域的 C^1- 微分同胚. □

III.A.1.2 隐函数定理

这是局部逆映射定理的一个标准推论.

定理 设 B_0, B_1, B_2 是三个 Banach 空间, U 是 $(x_0, y_0) \in B_0 \times B_1$ 的一个邻域, 且 $f : U \to B_2$ 连续可微. 假设存在连续线性映射 $A : B_2 \to B_1$, 使得 $f'_y(x_0, y_0)A = \mathrm{id}_{B_2}$. 那么存在从 x_0 的一个邻域到 B_1 的 g, $g' \in C^1$, 使得 $f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)$, 若 f'_y 还是一个双射,则 g 是唯一的, 且对于 (x_0, y_0) 的 (x, y) 而言, $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ 等价于 $y = g(x)$.

证明 将局部逆映射定理应用于 $F(x, y) = (x, f(x, y))$ 即可. □

我们可以看到这个定理的证明非常简单,但是它在求某些微分方程的解时是非常强有力的: 通过若干例子,我们将试图了解这一点在什么情况下有它的用武之地.

III.A.2 非线性微分方程的例子

III.A.2.1 微分方程的局部可解性

性质 2.1 设 $y' = g(x, y)$ 是一个微分方程组, 其中 g 在 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 的一个邻域中是实且 C^1 的. 证明在 x_0 的邻域上存在唯一解 y, 满足 $y(x_0) = y_0$.

证明 我们将给出三个证明, 其中每一个都包含了在下文中处理更一般情况时将会用到的结论. 不失一般性,我们假设 $x_0 = y_0 = 0$.

第一个证明 我们记 $x = \varepsilon t$. 若对于 $t \in [-1, +1], z(t)$ 是 $z' = \varepsilon g(\varepsilon t, z)$ 的一个解, 且满足 $z(0) = 0$, 则定义在 $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ 上的函数 $y(x) = z(x/\varepsilon)$ 就是我们要找的解.

考虑 $f(\varepsilon, z) = z' - \varepsilon g(\varepsilon t, z)$, 作为从 $\mathbb{R} \times B_1$ 中 $(0,0)$ 的一个邻域到 $B_2 = C^0([-1, +1])$ 的 C^1 映射, 其中 $B_1 = \{z \in C^1([-1, +1]), z(0) = 0\}$. 因为 $f'_z(0, 0) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 我们只要考虑由 $(Au)(t) = \displaystyle\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s$ 定义的 $A : B_2 \to B_1$, 然后应用隐函数定理就可以了.

第二个证明 设 $\tilde{y}(x) = xg(0, 0)$ 是一个近似解,选择某个充分小的 $\alpha > 0$ 使得 $f(y) = y' - g(x, y)$ 在 $B_1 = \{y \in C^1(I), y(0) = 0\}$(这里 $I = [-\alpha, +\alpha]$) 中 $\tilde{y}$ 的一个邻域上作为取值在 $B_0 = C^0(I)$ 内的函数是可定义的. 因为 $f'(\tilde{y}) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - g'_y(x, \tilde{y})$ 是一个线性方程组,我们可以找到 A 使得 $f'(\tilde{y})A = \mathrm{id}_{B_0}$,这样就可以应用局部逆映射定理.

选择在 0 点附近取值为 1 的函数 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$: 对充分小的 $\varepsilon > 0$, $\chi(x/\varepsilon)f(\tilde{y})$ 是 B_0 中的一个 "小扰动", 而我们可以找到 $\tilde{y}$ 附近的 $y \in B_1$, 使得 $f(y) = f(\tilde{y}) - \chi(x/\varepsilon)f(\tilde{y})$. 这样, 在 0 点的一个邻域中 y 就是我们所要找的解.

尽管没有前一个证明令人惊讶,这个证明给出了一个 (利用 x_0 处的一个近似解) 把 x_0 处的局部存在性问题转化成 B_0 里的扰动问题的步骤.

第三个证明 我们来解方程

$$y(x) = \int_0^x g(s, y(s))\,\mathrm{d}s \equiv H(y)(x),$$

方法是寻找 $C^0([-\alpha, \alpha])$ 的球体 $\overline{B(0, \beta)}$ 中 H 的不动点. 事实上, 若 $\beta \geqslant \alpha \sup|g|$, 则 H 在这个球上作用, 且若 $\alpha \sup|g'_y| < 1$, 则 H 是一个收缩映射.

这个不动点方法在第 III.B.1 节中求解双曲方程组的时候是有用的. □

III.A.2.2 非线性方程的周期解

性质 2.2 设 $p : (a, b) \to (c, d)$ 是一个严格递增连续函数[①]. 对任意取值在

①译校者注: 这里可要求 p 是 C^1 函数, 不影响对下文的理解.

(c, d) 中的函数 $g \in C^0_{2\pi}$(连续且以 2π 为周期), 存在取值在 (a, b) 中的函数 $y \in C^1_{2\pi}$, 满足 $y' + p(y) = g$.

证明 设 $U \subset C^1_{2\pi}$ 是取值在 (a, b) 中的函数构成的开集, 并用 $f(y) = y' + p(y)$ 定义 $f : U \to C^0_{2\pi}$.

a) 对任意的 $y \in U$, (由 $f'(y) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + p'(y)$ 定义的)$f'(y) : C^1_{2\pi} \to C^0_{2\pi}$ 是可逆的, 因为 $\int_0^{2\pi} p'(y)\,\mathrm{d}x \neq 0$. 我们可以利用常数变易法具体地算出一个周期解来得到这一点 (也可参见下文中的性质 C.3.3.1). 局部逆映射定理推出 $f(U)$ 在 $C^0_{2\pi}$ 中是一个开集.

b) 设 V 是 $C^0_{2\pi}$ 中取值在 (c, d) 中的函数构成的凸开集. 因为 $f(U) \cap V \neq \varnothing$, 所以为得到 $f(U) \supset V$ 我们只需证明 $f(U) \cap V$ 在 V 中是闭集即可.

这样, 设 $g \in V$, 而 $g_j \in f(U)$, $g_j \to g$, $f(y_j) = g_j$: 方程 $y_j' + p(y_i) = g_j$ 表明 $p(\sup\limits_x y_j)$ 和 $p(\inf\limits_x y_j)$ 都是 g_j 可以取到的值. 根据假设, $g_j([0, 2\pi])$ 和 $g([0, 2\pi]) \subset (c, d)$ 差别不大, 我们可以知道 y_j 的值都取在 (a, b) 的一个紧子集中. 然后根据方程可以得到 $\|y_j'\|_0 \leqslant$ 常数, 而且我们可以从序列 y_j 中找到一个在 C^0 中收敛于 y 的子序列; y 是周期的, 而由方程我们知道 $y \in C^1_{2\pi}$, 且满足 $f(y) = g$. □

这里我们看到, 巧妙地应用局部逆映射定理, 并和一些本质上属于拓扑的信息结合起来, 可以得到大范围分析的结果.

III.A.2.3 一个非线性 Dirichlet 问题的扰动

性质 2.3 对一个凸的紧致集 $A \subset \mathbb{R}^4$, 以 $B_0(A)$ 记 A 上对 x_2, x_3, x_4 具有连续偏导数的连续函数空间. 设 $u \in C^2(I, \mathbb{R})$ $(I = [a, b])$ 是 Dirichlet 问题

$$F(x,\ u(x),\ u'(x),\ u''(x)) = 0,\ \ u(a) = u(b) = 0$$

的解, 其中 $F \in B_0(A)$, A 是全体形如 (x, u, u', u'') 的点构成的集合的一个紧致邻域. 设 $F'_{u''} > 0$, $F'_u < 0$. 则对于 F 附近的任意 $G \in B_0(A)$, 问题 $G(x, v, v', v'') = 0$, $v(a) = v(b) = 0$ 存在一个解 v.

证明 考虑在 (F, u) 的邻域上由 $f(G, v)(x) = G(x, v(x), v'(x), v''(x))$ 定义的从 $B_0(A) \times C^2_0(I)$ 的一个开集到 $C^0(I)$ 的映射 $f(G, v)$, 其中 $C^2_0(I) = \{u \in C^2(I), u(a) = u(b) = 0\}$. 其微分 $f'_v(F, u)$ 为

$$f'_v(F,\ u) = F'_{u''}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + F'_{u'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + F'_u.$$

若 $f'_v(F, u)w = 0$, 则根据假设 $F'_{u''} > 0$, $F'_u < 0$, 我们知道 w 不能有严格正的极大值和严格负的极小值, 因此 $w = 0$.

线性 Dirichlet 问题的一般理论告诉我们 f'_v 是满射 (这就是所谓 “Fredholm 两择性”). 我们来给出这一事实的一个初等证明: 设 y_1 和 y_2 是 $f'_v y_j = 0$ 的解, 且满足

$y_1(a)=0,\ y_1'(a)=1,\ y_2(b)=0,\ y_2'(b)=1.f_v'$ 在 $C_0^2(I)$ 中是单射表明了 y_1 和 y_2 是独立的. 这样我们就可以用常数变易法找到 $f_v'y=h$ 的一个形如 $y=\alpha y_1+\beta y_2$ 的解, 且可以选择 $\alpha(b)=0$ 和 $\beta(a)=0$, 也就是说 $y\in C_0^2(I)$.

应用隐函数定理就可以完成证明. □

III.A.2.4 非线性椭圆方程的局部可解性

性质 2.4 设 $F=F(x,\,u^{(\alpha)})$ ($|\alpha|\leqslant 2$) 对于其 $n+N$ 个实变量 ($N=(n+1)(n+2)/2$) 是 C^∞ 的函数. 假设有 $p_0\in\mathbb{R}^N$ 满足

i) $F(0,\,p_0)=0$.

ii) 算子 $P=\displaystyle\sum_\alpha\frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}}(0,\,p_0)\,\partial^\alpha$ 是椭圆的, 即对于 $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\xi\neq 0$,

$$p_2(\xi)=\sum_{|\alpha|=2}\frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}}(0,\,p_0)\,\xi^\alpha\neq 0.$$

那么在 $x=0$ 的一个邻域内,方程

$$F(x,\,\partial^\alpha u)=0$$

存在一个实值 C^∞ 解 u,满足

$$(\partial^\alpha u(0))_{|\alpha|\leqslant 2}=p_0.$$

证明 设 $\tilde u\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\partial^\alpha\tilde u(0)_{|\alpha|\leqslant 2}=p_0$. 固定 $\rho>2$, $\rho\notin\mathbb{N}$,并记

$$B_1=\{z\in C^\rho(B),\,\partial^\alpha z(0)=0,\,|\alpha|\leqslant 2\},$$
$$B_2=\{v\in C^{\rho-2}(B),\,v(0)=0\},$$

其中 $B=\{x\in\mathbb{R}^n,\,|x|\leqslant 1\}$.

对于 0 点附近的 $\varepsilon\in\mathbb{R}$ 和 $z\in B_1$, 定义:

$$f(\varepsilon,\,z)(y)=F(\varepsilon y,\,\tilde u(\varepsilon y)+\varepsilon^2 z(y),\,(\nabla\tilde u)(\varepsilon y)+\varepsilon(\nabla z)(y),\,(\nabla^2\tilde u)(\varepsilon y)+\nabla^2 z(y)).$$

这样我们就定义了一个从 $\mathbb{R}\times B_1$ 中 $(0,0)$ 的邻域到 B_2 的映射 f, 满足 $f(0,\,0)=0$. 偏导数 $f_z'(0,\,0)$ 是 $P_2=\displaystyle\sum_{|\alpha|=2}\frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}}(0,\,p_0)\partial^\alpha$, 即 P 的主部. 必要时对坐标作伸缩和旋转变换,我们总可以假设 (至多差一个符号) $p_2=-|\xi|^2$ 和 $P_2=\Delta$. 为应用隐函数定理,我们需要找到一个满足 $\Delta A=\mathrm{id}$ 的映射 $A:B_2\to B_1$. 利用 Δ 的一个基本解, 容易证明存在满足 $\Delta A_0=\mathrm{id}$ 的 $A_0:C^{\rho-2}(B)\to C^\rho(B)$(参见习题 A.2).

这样就只需对 $v \in B_2$ 记

$$Av(y) = A_0v(y) - A_0v(0) - (A_0v)'(0) \cdot y - (A_0v)''(0) \cdot \frac{y^2}{2},$$ [1]

因为

$$\Delta\left((A_0v)''(0)\frac{y^2}{2}\right) = \text{trace }(A_0v)''(0) = (\Delta A_0v)(0) = v(0) = 0.$$

于是我们得到满足 $f(\varepsilon, z) = 0$ 的 $\varepsilon > 0$ 和 z, 而且函数 $u(x) = \tilde{u}(x) + \varepsilon^2 z(x/\varepsilon)$ 是问题的一个 C^ρ 解.

根据关于椭圆方程正则性的标准结果,我们知道 $u \in C^\infty$ (参见引理 2.5). □

下面在附加条件 $\rho > 3$ 的情况下给出我们用到的正则性结果的一个简单证明.

引理 2.5 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中开集,并设实值函数 $u \in C^\rho(\Omega)$ $(\rho \geqslant 3)$ 是方程

$$F(x, \partial^\alpha u) = 0 \quad (|\alpha| \leqslant 2)$$

的解,其中 F 是其 $n+N$ 个实变量的 C^∞ 函数. 假设算子 $P = \sum_{|\alpha|=2} \frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}}(x, \partial^\alpha u(x))\partial^\alpha$ 在 Ω 上是椭圆的. 则 $u \in C^\infty(\Omega)$.

证明 设 $x_0 \in \Omega$. 我们先证明在 x_0 附近 $u \in C^{\rho+1}$. 然后变动 x_0, 我们得到 $u \in C^{\rho+1}(\Omega)$, 然后递归得到 $u \in C^\infty(\Omega)$.

设 $j \in \{1, \cdots, n\}$;我们记 $v = \partial_j u \in C^{\rho-1}(\Omega)$. 对方程两边应用 ∂_j,我们有

$$Pv \in C^{\rho-2}(\Omega),$$

这样如果我们记和 P 在 x_0 点重合的常系数算子为 P_0,就有

$$P_0v + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \partial^\alpha v \in C^{\rho-2}(\Omega),$$

其中 $a_\alpha \in C^{\rho-2}(\Omega)$, $a_\alpha(x_0) = 0$.

设函数 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $\left\{|x| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$ 的邻域内取值为 1,而在 $\{|x| \geqslant 1\}$ 上取值为 0. 对 $\varepsilon > 0$, 我们定义

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right), \quad v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon v, \quad a_\alpha^\varepsilon = \varphi_{2\varepsilon} a_\alpha.$$

对充分小的 ε, $v_\varepsilon \in C_0^{\rho-1}(\mathbb{R}^n)$, $a_\alpha^\varepsilon \in C_0^{\rho-2}(\mathbb{R}^n)$, 且

$$P_0 v_\varepsilon = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha^\varepsilon \partial^\alpha v_\varepsilon \in C_0^{\rho-2}(\mathbb{R}^n).$$

[1] 译校者注: 提醒读者注意, 这里的 y 是一个向量, 该式的后两项应分别理解为内积和二次型.

现在我们利用第 II 章性质 A.2.1.1 的证明中引进的下述分解: $\forall a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\forall b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 存在算子 A 和 B 使得

$$ab = \sum_q (S_q a) b_q + \sum_p (S_{p+1} b) a_p = Ab + Ba,$$

其中

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N},\ \|A\|_{C^\sigma \to C^\sigma} \leqslant \text{常数} \cdot \|a\|_0,\ \|B\|_{C^\sigma \to C^\sigma} \leqslant \text{常数} \cdot \|b\|_0.$$

对 $a = a_\alpha^\varepsilon$, $b = \partial^\alpha v_\varepsilon$ 应用这个结果, 我们得到

$$P_0 v_\varepsilon + T_\varepsilon v_\varepsilon \in C^{\rho-2}(\mathbb{R}^n),$$

其中

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}, \forall a; \|T_\varepsilon\|_{C^{\sigma+2} \to C^\sigma} \leqslant \text{常数} \cdot \sum_{|\alpha|=2} \|a_\alpha^\varepsilon\|_0 = O(\varepsilon).$$

考虑 P_0 的一个拟基本解在方程上的左作用, 我们得到

$$v_\varepsilon + K_\varepsilon v_\varepsilon \in C^\rho(\mathbb{R}^n),$$

其中

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N},\ \|K_\varepsilon\|_{C^{\sigma+2} \to C^{\sigma+2}} = O(\varepsilon).$$

固定 $\varepsilon > 0$ 使得对于 $\sigma = \rho - 3$ 和 $\sigma = \rho - 2$,有 $\|K_\varepsilon\|_{C^{\sigma+2} \to C^{\sigma+2}} < 1$, 我们得到 $v_\varepsilon \in C^\rho(\mathbb{R}^n)$, 因此在 x_0 附近 $v \in C^\rho(\mathbb{R}^n)$, 证毕. □

注　a) 事实上引理 2.5 对于 $\rho > 2$ (甚至 $\rho = 2$) 也是成立的,但是证明更具技巧性.

b) 为了简单起见, 在性质 2.4 的表述中我们故意把自己局限在 2 阶数值方程的情形. 有兴趣的读者可以自行验证这里给出的证明对于任意阶椭圆方程组都是适用的.

III.B　应用不动点方法的两个例子

III.B.1　一个流体力学的例子

III.B.1.1　拟线性对称双曲组

我们在带状区域 $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_x^n$ 上考虑下述 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \partial_t u + \sum A_j(u) \partial_j u + B(u) = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

这里 $u \in \mathbb{R}^N$, 而 $A_j(u)$ 和 $B(u)$ 是实的 $N \times N$ 和 $N \times 1$ 矩阵,并且在 u_0 的值域的一个开邻域 $G \subset \mathbb{R}^N$ 上是 C^∞ 的. 我们做如下假定

(H) 存在 G 上 C^∞ 实对称矩阵值函数 $S(u)$,使得

i) $S(u) \geqslant S_0 \cdot \mathrm{id},\ S_0 > 0$,

ii) $S(u)A_j(u)$ 是对称的.

容易见到对于 $\xi \in \mathbb{R}^n$, $u \in G, \sum A_j(u)\xi_j$ 的特征值都是实的: 我们称该方程组是双曲的. (参见第 II 章 C.2 节.)

满足 (H) 的方程组被称为可对称化双曲组 (矩阵 SA_j 的对称性在这里是至为重要的 (参见第 II 章 C.1.1 节)). 最后, A_j 的系数仅和 u 有关、而和 ∇u 无关这一事实决定了方程组的一种特殊的非线性特性, 称之为 "拟线性" 的.

这样的系统在自然界中是存在的. 例如, 在 $\mathbb{R}^n$ 中一个可压缩流体的状态是由其密度 $\rho > 0$ 来描述的,在等熵假设下 (具体什么是熵在这里无关紧要) 流体的速度场 $v = (v_1, \cdots, v_n)$ 满足方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\,(\rho v) = 0, \\ \dfrac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \operatorname{div}\,(\rho v_i v + p e_i) = 0, \quad i = 1, \cdots, n, \end{cases}$$

其中 $e_i = (0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ 是第 i 个基向量, 而压力 $p = p(\rho)$ 是 ρ 的已知递增函数. 在此情况下, $N = n + 1$, $B \equiv 0$, 而相应的方程组具有等价形式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\,(\rho v) = 0, \\ \dfrac{\partial v_i}{\partial t} + v \cdot \nabla v_i + \dfrac{c^2}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0, \ \text{其中}\, p'_\rho = c^2. \end{cases}$$

这样我们就有

$$u = (\rho,\, v), \quad A_i(u) = \begin{pmatrix} v_i & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v_i & & \\ \vdots & & & \\ c^2/\rho & & & v_i \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

而

$$S(u) = \begin{pmatrix} c^2 & & & \\ & \rho^2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \rho^2 \end{pmatrix}.$$

我们提醒读者注意, 强制性 (coercivity) 假设 (H) i) 只有当密度 ρ 被一个正实数从下方控制的时候才成立. 为做到这一点,我们要么在 $[0, T] \times \mathbb{T}^n$ 上解方程组 (这里 $\mathbb{T}^n$ 是 n 维环面), 要么引进 $\mathbb{R}^n$ 上某种适当的局部 H^s 空间 (参见 [Ma1]).

注意到这两个方程实际上是质量和动量的守恒律的数学描述: 它们的一个特点在于用到了散度. 这样的系统是一种非常有趣的拟线性方程组, 称为 "守恒律方程组". 读者可以在 [Ma1] 找到这一理论的介绍. 这里我们将不会用到这个例子的这一特殊性质.

III.B.1.2 解关于时间的局部存在性

定理 1.2 设方程组 $(*)$ 满足条件 (H). 若 $u_0 \in H^s$, $s \in \mathbb{N}$, $s > n/2+1$, 则存在 $T > 0$ 和 $(*)$ 的一个解 $u \in L^\infty([0, T]; H^s) \cap \mathrm{Lip}([0, T]; H^{s-1})$.

如果我们把 $(*)$ 和 III. A 节中性质 A.2.1 做比较,我们注意到下述本质区别: 我们不能利用隐函数定理 (的第一种和第二种证明), 因为 (利用 III.A.2.1 中的记号) f 作用下的光滑性 "损失" 不能够通过解线性化方程 f'_z "补全" 回来. 然而隐函数定理的第三种证明可以用在这里: 我们用

$$\begin{cases} S(u^k)\partial_t u^{k+1} + \sum S(u^k)A_j(u^k)\partial_j u^{k+1} + S(u^k)B(u^k) = 0 \\ u^{k+1}\big|_{t=0} = S_{\theta_{k+1}} u_0, \end{cases} \tag{$**$}$$

定义序列 $\{u^n\}_{n\in \mathbb{N}}$,其中 $u^0 = S_{\theta_0} u_0$.

这里 S_θ 是 Sobolev 空间 H^s 上的一族光滑化算子, 具有第 II 章 A 节性质 1.6 中所描述的性质, 这里 $\theta_k \nearrow +\infty$ 是一个待定序列. 事实上, $(**)$ 表示在每一步我们都在解一个和 "真正的" 线性化系统 u^k 只差 0 阶项的 (对称) 线性 (双曲) 方程组, 这些 0 阶项是无关紧要的. 把 u_0 替换为 $S_{\theta_{k+1}} u_0$ 的目的就是为了得到 C^∞ 类函数 u^k,这样所考虑的微分方程组就具有 C^∞ 系数,这样的方程组总是更加容易求解的. 这里,所谓 "不动点" 方法即是把过程 $(**)$ 具体写出来.

余下的步骤是证明函数列 u^k 的存在性和收敛性. 这个证明将用到下面两个 (在第 II 章中部分证明的) 结论:

i) 对称双曲组 $L = S\partial_t + \sum \tilde{A}_j \partial_j$ 的 Cauchy 问题在 C^∞ 中有解, 且具有 "能量估计"

$$c_0 \sup \mathrm{e}^{-\lambda t} |u(t, \cdot)|_0 \leqslant |u(0, \cdot)|_0 + \int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t} |Lu(t, \cdot)|_0 \, \mathrm{d}t,$$

其中 $S \geqslant c_0 > 0$,而 λ 满足 $2c_0\lambda \geqslant \left\| \frac{1}{2}\mathrm{div}\tilde{A} - \frac{\partial S}{\partial t} \right\|_0$. (参见第 II 章 C.1.1 和 C.1.2 节.)

ii) 我们有第 II 章 A.2 节中建立的非线性函数的 "线性" 估计.

我们把证明分成两个部分来讲: 对 u^k 的 "大范数" 控制和 "小范数" 下的收敛性.

事实上, 我们将证明 $u^{k+1} - u^k$ 是一个收敛级数: 而唯一可能的途径是作相应的方程 $(**)$ 之差, 并利用能量估计 i); 这样做的时候我们假设系数 $S(u^k)$ 和

$S(u^k)A_j(u^k)$ 对于 Lipschitz 范数是有界的: 因此这是 u^k 在 (比 Lipschitz 范数更强的) "大范数" 下的一个界, 我们这就来建立它.

III.B.1.3 "大范数" 控制

这里所谓 "大范数" 是指

$$|||u|||_s = |||u|||_{s,T} = \sup_{t\in[0,T]} |u(t,\cdot)|_s$$

(这里的 s 和定理 1.2 中的 s 是同一个).

这个范数非常适合能量估计 i) 的形式, 而且由于 $s > n/2+1$, $\|\nabla_x u\|_0 \leqslant C|||u|||_s$ (参见第 II 章性质 A.1.4). 我们 (对于某个待定的 $\delta > 0$) 做如下归纳假设:

(H_k) 对于 $0 \leqslant l \leqslant k$, $|||u^\ell - S_{\theta_0}u_0|||_{s,T} \leqslant \delta$.

我们将证明对于适当的 δ, θ_0 和 T, $(H_k) \Rightarrow (H_{k+1})$ (注意根据 u^0 的定义, (H_0) 成立).

a) 先来确定我们的确能够解 (**): 因为 u_0 有界, $u_0(x,t)$ 取值在 G 的一个紧子集 K 中; 若 θ_0 和 $1/\delta$ 充分大, u^k 就取值在 G 的某个固定的紧子集中, 且在其上有 $S(u) \geqslant c_0$.

b) 引进 $v^{k+1} = u^{k+1} - S_{\theta_0}u_0$, 它满足方程组

$$\partial_t v^{k+1} + \sum A_j(u^k)\partial_j v^{k+1} = -B(u^k) - \sum A_j(u^k)\partial_j S_{\theta_0}u_0$$
$$v^k|_{t=0} = S_{\theta_{k+1}}u_0 - S_{\theta_0}u_0.$$

为计算 $|||v^{k+1}|||_s$, 我们考虑 $\partial_x^\alpha v^{k+1}(|\alpha| \leqslant s)$ 所满足的方程组:

$$\begin{aligned} &S(u^k)\partial_t\partial_x^\alpha v^{k+1} + \sum (SA_j)(u^k)\partial_j\partial_x^\alpha v^{k+1} \\ &= -S(u^k)\partial_x^\alpha(B(u^k)) - S(u^k)\partial_x^\alpha\left\{\sum A_j(u^k)\partial_j S_{\theta_0}u_0\right\} \\ &\quad -S(u^k)\sum\left\{\partial_x^\alpha(A_j(u^k)\partial_j v^{k+1}) - A_j(u^k)\partial_j\partial_x^\alpha v^{k+1}\right\} \equiv F, \end{aligned} \tag{1.3.1}$$
$$\partial_x^\alpha v^{k+1}|_{t=0} = \partial_x^\alpha\{S_{\theta_{k+1}}u_0 - S_{\theta_0}u_0\}.$$

这样由前述结论 ii) 就可以推出下述引理.

引理 我们有估计 $|F(t,\cdot)|_0 \leqslant C(1 + |v^{k+1}(t,\cdot)|_s)$, 其中 C 与 T, k 均无关.

证明 F 的前两项为一常数所控制. 而第三项可以写作 (至多差一个有界因子 $S(u^k)$):

$$\sum_{\alpha\geqslant\beta,\,|\beta|\geqslant 1} *\partial_x^\beta(A_j(u^k))\partial_x^{\alpha-\beta}\partial_j v^{k+1};$$

我们可以把第 II 章性质 A.2.1.2 应用于函数 $\partial_l(A_j(u^k))$ 和 $\partial_j v^{k+1}$(对于指标 $s-1$), 由此得到各项的 L^2 范数的估计 (∂_l 是一个和 ∂_x^β "无关" 的导数): 我们得到

$$|\Sigma|_0 \leqslant C\left(\|\partial_l(A_j(u^k))\|_0|v^{k+1}|_s + |\partial_l A_j(u^k)|_{s-1}\|\partial_j v^{k+1}\|_0\right).$$

因为 $\|u^k\|_0 \leqslant$ 常数,

$$\begin{aligned}\|\partial_l(A_j(u^k))\|_0 = \|A_j'(u^k)\partial_l u^k\|_0 &\leqslant \text{常数} \cdot \|\partial_l u^k\|_0 \\ &\leqslant \text{常数} \cdot |||u^k|||_s \\ &\leqslant \text{常数},\end{aligned}$$

且根据第 II 章性质 A.2.2 有 $|\partial_l A_j(u_k)|_{s-1} \leqslant$ 常数 $\cdot (1 + |||u^k|||_s) \leqslant$ 常数. 最后, $\|\partial_j v^{k+1}\|_0 \leqslant$ 常数 $\cdot |v^{k+1}|_s$, 引理证毕. □

本引理中 F 的估计的 "线性" 本质是定理的证明的核心, 因为它使得我们可以用下面 c) 中将要解释的一系列 "把右边吸收到左边" 的过程来控制 $|||v^{k+1}|||_s$.

c) 为了将能量不等式 i) 应用于 (1.3.1), 我们注意到 $\partial_t u^k + \sum A_j(u^{k-1})\partial_j u^k + B(u^{k-1}) = 0$ 和 (H_k) 能够推出 $\|\partial_t u^k\|_0 \leqslant$ 常数, 这样就有 $\|\partial_t(S(u^k)) - 1/2\mathrm{div}\,(SA(u^k))\|_0 \leqslant$ 常数.

对于充分大的 $\lambda \geqslant \lambda_0$, 我们有

$$\begin{aligned}c_0 \sup \mathrm{e}^{-\lambda t}|\partial_x^\alpha v^{k+1}(t,\cdot)|_0 &\leqslant |S_{\theta_{k+1}}u_0 - S_{\theta_0}u_0|_s + \int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}|F(t,\cdot)|_0\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \delta_1 + CT\sup\left\{\mathrm{e}^{-\lambda t}(1 + |v^{k+1}(t,\cdot)|_s)\right\},\end{aligned}$$

其中对于充分大的 θ_0, δ_1 可以取得充分小, 且独立于 k, 因为当 $\theta \to +\infty$ 时 $|S_\theta u_0 - u_0|_s \to 0$. 在对于 $|\alpha| \leqslant s$ 和 $\lambda = \lambda_0$ 所得到的不等式的基础上, 我们可以选择充分小的 T 和充分大的 θ_0 以得到 (H_{k+1}).

III.B.1.4 "小范数" 下的收敛性

通过做减法, 我们得到:

$$\begin{cases} S(u^k)\partial_t(u^{k+1} - u^k) + \sum(SA_j)(u^k)\partial_j(u^{k+1} - u^k) \\ \quad = -[S(u^k) - S(u^{k-1})]\partial_t u^k - \sum[(SA_j)(u^k) - (SA_j)(u^{k-1})]\partial_j u^k \\ \qquad -[(SB)(u^k) - (SB)(u^{k-1})], \\ (u^{k+1} - u^k)|_{t=0} = (S_{\theta_{k+1}} - S_{\theta_k})u_0. \end{cases}$$

能量不等式 i) 再一次提供了 $u^{k+1} - u^k$ 的 "小范数" 控制:

$$c_0 \sup \mathrm{e}^{-\lambda t}|(u^{k+1} - u^k)(t,\cdot)|_0 \leqslant |(S_{\theta_{k+1}} - S_{\theta_k})u_0|_0 + C\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}|(u^k - u^{k-1})(t,\cdot)|_0\,\mathrm{d}t.$$

因为 $\alpha_k \equiv |S_{\theta_{k+1}}u_0 - S_{\theta_k}u_0|_0 \leqslant$ 常数 $\cdot \theta_k^{-s-1}(\theta_{k+1} - \theta_k)|u_0|_s$, 几乎所有的 θ_k (例如 $\theta_k = k$) 都会使级数 α_k 收敛. 若 T 充分小, 我们得到

$$\sup|(u^{k+1} - u^k)(t,\cdot)|_0 \leqslant C\sup|(u^k - u^{k-1})(t,\cdot)|_0 + \alpha_k,$$

其中固定的常数 $C < 1$, 由此得到, 在 $L^\infty([0,T];L^2)$ 中 u^k 收敛于 u.

III.B.1.5 解的光滑性和结论

因为 $u^k(t,\cdot)$ 在 H^s 中有界,且在 L^2 中收敛于 $u(t,\cdot)$, 我们实际上得到 $u \in L^\infty([0,T];H^s)$ (根据一个经典的推理过程: 存在 u^k 的一个子列, 在 H^s 中弱收敛于 $v \in H^s$; 在分布意义下极限是唯一的, 因此 $u=v$). 由范数 $|\ |_s$ 的凸性, 我们得到对于任意的 $s'<s, |(u^k-u)(t,\cdot)|_{s'} \to 0$: 因为 $s>n/2+1$,我们可以选择 $s'>n/2+1$, 这样就得到 $u \in C([0,T];C^1)$ 是 $(*)$ 的一个 (经典) 解.

利用方程我们也可以得到 $u \in \mathrm{Lip}([0,T];H^{s-1})$. 事实上, 我们可以证明 $u \in C([0,T];H^s) \cap C^1([0,T];H^{s-1})$.

III.B.2 等距嵌入问题

III.B.2.1 简介

设 M 是一个紧致 C^∞ 流形, g 是 M 上的 Riemann 度量, 即在一个局部坐标系 $(x_1,\cdots,x_n)$ 中, g 是一个二次型 $g=\sum g_{ij}(x)\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j$. 我们对于一个适当的 N 找一个单射 $u:M\to\mathbb{R}^N$ 使得

$$g_{ij}=\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j}\quad (\text{简记为 } g={}^t u' u'), \tag{2.1}$$

即, g 通过 u 和 $\mathbb{R}^N$(连同其上常用的内积, 记为 “·” 或 $(\ ,\ )$) 在 $u(M)$ 上诱导的度量相对应.

下述三个相当初等的事实让我们可以把这个问题简化为一个**扰动**问题.

i) 只要在需要的时候把 N 变大, 我们没有必要担心 u 的单射性 (参见习题 B.1)

ii) (对于某个固定的 N) 所有形如 (2.1) 的度量全体在 C^∞ 度量空间中是稠密的 (习题 B.2).

iii) 设 $u_j: M\to\mathbb{R}^{N_j}$ $(j=1,2)$ 是 C^1 的, 且 $u: M\to\mathbb{R}^{N_1+N_2}$ 由 $u(x)=(t_1u_1(x),t_2u_2(x))$ 所定义, 则相应的度量满足 $g=t_1^2g_1+t_2^2g_2$.

假设对于某个 g_0 附近的 g 我们知道如何解方程 (2.1): 那么对任意的 g, 我们选择 t_0 使得 $t_0^2g_0<g$, 然后 $g=t_0^2(g_0+f)+(g-t_0^2g_0-t_0^2f)$; 根据 ii), f 可以取得足够小, 使得 $g_2=g-t_0^2g_0-t_0^2f$ 可以对于 $u=u_2$ 表示成 (2.1) 的形式; 这样, 根据假设, $g_1=g_0+f$ 可以由某个 u_1 来表示, 根据 iii), g 可以由 (t_0u_1,u_2) 表示.

为了简单起见, 我们承认 (这并不困难) 下述事实: (通过把 M 嵌入到适当的环面中) 我们总能够把问题归结到 M 是 n 维环面 $\mathbb{T}^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 的情形. 这使我们可以有 M 上的整体坐标, 并给 (2.1) 以一个明确的意义.

III.B.2.2 简化为一个不动点问题

在 III.B.2 中我们看到如何将一个任意的 M 的等距嵌入问题化简为下述问题: 对 $M=\mathbb{T}^n$, 和 (待定的) g_0 附近的 g, 寻找满足 (2.1) 的 u.

现在我们可以来陈述下面的定理.

定理 2.2 设 g_0 是由一个自由嵌入 u_0 诱导的度量. 对于任意的 $\rho > 2$ ($\rho \notin \mathbb{N}$) 和 g_0 附近的 C^ρ 类度量 g, 问题有一个 C^ρ 类嵌入 u 作为解.

所谓"自由嵌入",是指满足:

$$\text{向量 } \partial_i u_0 \ (i = 1, \cdots, n) \quad \text{和} \quad \partial_{ij}^2 u_0 \ (1 \leqslant i, j \leqslant n) \text{独立} \tag{2.2.1}$$

的映射 $u_0 : M \to \mathbb{R}^N$. 容易知道这样的 u_0 确实存在 (习题 B.3). 为证明定理, 我们记 $u = u_0 + v$, $g = g_0 + h$,那么方程 $(\partial_i u, \partial_j u) = g_{ij}$ 可以写作

$$(\partial_i u_0, \partial_j v) + (\partial_j u_0, \partial_i v) + (\partial_i v, \partial_j v) = h_{ij}. \tag{2.2.2}$$

然后我们用下述引理

引理 设 $\Delta = \sum \partial_j^2$ 是 M 上的 Laplace 算子, 我们有等式

$$(1 - \Delta)(\partial_i v, \partial_j v) = \partial_i f_j(v) + \partial_j f_i(v) + r_{ij}(v),$$

其中 $f_i(v) = -(\Delta v, \partial_i v)$, $r_{ij}(v)$ 是一个关于导数 $\partial^\alpha v(|\alpha| \leqslant 2)$ 的 (常系数) 二次多项式.

证明 我们有

$$\begin{aligned}(1 - \Delta)(\partial_i v, \partial_j v) &= -(\partial_i \Delta v, \partial_j) - (\partial_i v, \partial_j \Delta v) + \partial^\alpha v \text{ 的二次多项式} \\ &= -\partial_i(\Delta v, \partial_j v) - \partial_j(\partial_i v, \Delta v) + r_{ij}(v).\end{aligned}$$

□

这样方程 (2.2.2) 就可以写成

$$\partial_j(\partial_i u_0, v) + \partial_j F_i(v) + \partial_i(\partial_j u_0, v) + \partial_i F_j(v) - 2(\partial_{ij}^2 u_0, v) = h_{ij} - R_{ij},$$

其中我们记 $F_i(v) = (1 - \Delta)^{-1} f_i(v)$, $R_{ij} = (1 - \Delta)^{-1} r_{ij}$, 这样只需解方程组

$$\begin{aligned}(v, \partial_i u_0) &= -F_i(v), \\ (v, \partial_{ij}^2 u_0) &= \frac{R_{ij} - h_{ij}}{2}.\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

以 $M(u_0)w$ 记 $\partial_j u_0$, $\partial_{ij}^2 u_0$ 的唯一满足

$$(v, \partial_i u_0) = w_i, \quad (v, \partial_{ij}^2 u_0) = w_{ij} \quad (\text{利用 } (2.2.1)),$$

的线性组合. 这样方程组 (2.2.3) 最终可以被写成"不动点"的形式

$$v = M(u_0) \begin{pmatrix} -F_i(v) \\ \dfrac{R_{ij} - h_{ij}}{2} \end{pmatrix} = G(v). \tag{2.2.4}$$

我们立即可以得到 G 把 C^ρ 映到它自身, 因为 $(1-\Delta)^{-1}$, 作为一个 -2 阶拟微分算子, 把 $C^{\rho-2}$ 映到 C^ρ. 而且, 对于充分小的 $R>0$, G 是球体 $B_R=\{v\in C^\rho,\ \|v\|_\rho\leqslant R\}$ 上的一个严格收缩映射, 即对于某个 $C<1, \|G(v)-G(0)\|_\rho\leqslant C\|v\|_\rho$, 因为 f_i 和 r_{ij} 关于 v 是二次的, 这就得到 (2.2.4) 的一个解的存在性. □

事实上,这里所描述的简化过程只是最近才被发现 (参见 [G]). 等距嵌入问题最早是 Nash 于 1956 年利用迭代方法解决的, 到 1961 年 Moser 重又拾起这套办法, 此后这就被称作 "Nash–Moser 方法". 尽管最终证明这一方法对于最初导致人们引进它的问题并无多大用处, 它仍是研究扰动问题的一个基本工具. 在最后一节中我们将介绍这一方法, 及其对于等距嵌入问题和环面上向量场的扰动问题的应用.

III.C Nash–Moser 定理

III.C.1 简介

设 M 是一个紧致 C^∞ 流形,并设 Φ 是定义在 $C^\infty(M,\mathbb{R}^p)$ 的一个开集 U 上且取值在 $C^\infty(M,\mathbb{R}^q)$ 中的映射.

我们首先来复习若干微分演算中的概念. 一般来说, 对于 $\mathbb{R}$ 上两个拓扑线性空间 E_1, E_2, 以及 E_1 中的开集 U, 我们称连续映射 $\Phi: U\to E_2$ 是 C^1 类的, 如果存在对于第二个变量线性的连续映射,

$$\begin{aligned}\Phi': U\times E_1 &\to E_2\\ (u,\,v)&\mapsto \Phi'(u)\cdot v\end{aligned}$$

使得

$$\forall u\in E_1, \forall v\in E_1,\ \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\Phi(u+tv)-\Phi(u))=\Phi'(u)\cdot v.$$

对于 $k\geqslant 2, C^k$ 类映射可以递归地定义, 即 Φ 是 C^k 的, 若 Φ' 是 C^{k-1} 的, 且依惯例, 我们记

$$\Phi^{(k)}(u)\cdot(v_1,\cdots,v_k)=\frac{\partial^k}{\partial t_1\cdots\partial t_k}\Phi(u+t_1v_1+\cdots+t_kv_k)|_{t_1=\cdots=t_k=0}.$$

细心的读者会注意到, 如果限制在赋范空间的情形, 我们并不能得到经典意义下的 C^k 映射的概念, 而会得到一个更广的概念. 在这里我们并不想对于这种差异做更细致的分析, 所以我们仅指出, 这里引进的概念既是容易操作的, 也能够很容易地对 C^∞ 函数空间上所有经典的泛函的例子加以验证.

结束这段小插曲, 回到我们的问题上来: 假设 Φ 是 C^k 类的, 我们的目的是解方程

$$\Phi(u)=\Phi(u_0)+f, \tag{$*$}$$

其中 $u_0\in C^\infty(M,\mathbb{R}^p)$ 和 "小" 扰动 f 都是给定的.

需要用 Nash–Moser 方法来解决的典型例子是当线性化方程

$$\Phi'(u)v = g \tag{**}$$

只能在有很大的"导数缺失"的情况下求解的时候. 为了衡量这种缺失, 我们将不像在 A 和 B 部分中那样只考虑单个 Banach 空间, 而是考虑一族递降的空间 A_s $(0 \leqslant s < +\infty)$, 具有范数 $|\ |_s$, 且其交 $\cap A_s = C^\infty$. 最常见的例子是 $A_s = C^s$ (Hölder 空间) 或 $A_s = H^s$ (Sobolev 空间), 都是利用坐标图定义在 M 上的.

我们假设有 $\Phi'(u)v = g$ 的解 v (记作 $v = \psi(u)g$), 对于某个固定的 u, (某一有限区间内) 任意的 s 和固定的数 r, 满足形如

$$|v|_s \leqslant C|g|_{s+r}$$

的估计. 在此情况下, 我们称方程在"缺失 r 次导数"意义下求解 (对于一般的一族空间 A_s, 这种说法没有任何具体意义, 但在这里无关紧要).

事实上, 我们将看到在求解 $(*)$ 的过程中我们只要处理 C^∞ 函数就可以了: 这样, 我们所说的并不是 v 相对于 g 的光滑性缺失, 而是失去关于光滑性的信息.

如果我们对指标 $s \in [0, s_+]$ 具有关于 $|u_0|_s$ 的信息, 那么对于 u_1 我们就只对于指标 $[0, s_+ - r]$ 有相应的信息, 对 u_2 只对于指标 $[0, s_+ - 2r]$ 有相应的信息, 依此类推 (其中 $u_0, u_1, u_2, \cdots, u_n \to u$ 是为了求 u 得到的逐级近似). 这样若干步之后我们就会失去所有的信息.

而且, 这一"精度缺失" r 还要叠加上在求解 $(**)$ 的过程中造成的对方程的系数, 也就是 u 的缺失 r'. 例如我们可以假设 $v = \psi(u)g$ 对于固定的 r, r' 以及任意的 s 满足形如

$$|v|_s \leqslant C(|g|_{s+r} + |g|_r(1 + |u|_{s+r'})) \tag{***}$$

的估计. 因为我们采用的是 (稍加修正的)Newton 方法, 利用 $\Phi'(u_n)$ 来计算 u_{n+1}, 每一步求出的解都是下一步的系数, 这样对每一步信息区间长度的减少都要把 r' 和 r 算上.

正是这种相对于空间族 A_s 的导数双重缺失决定了 Nash–Moser 定理的适用性: 粗略地说, 只要缺失 r 和 r' 是固定的就行, 这个时候我们称 $(***)$ 是一个"柔性估计". 需要提醒大家注意, 这种柔性是依赖于空间族 A_s 的: 对于给定的问题, 我们一般不能肯定相应的空间族是否存在, 即便已经知道了一个这样的空间族, 我们完全无法知道是否存在另外一族空间具有更小的缺失, 或者干脆可以应用普通的不动点定理.

我们将对于两个经典的例子讨论"导数缺失"(C.2 节), 而在 C.3 节我们将看到为什么很多非线性算子都可以在常用的函数空间上做柔性估计.

最后, 在 III.C.4 节我们将描述解 $(*)$ 的过程: Newton 方法结合上对函数做光滑化.

III.C.2 两个经典的例子

III.C.2.1 环面上一个常向量场的扰动

在环面 $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 上,我们取 $\mathbb{R}^n$ 诱导的局部坐标系. 考虑一个常向量场 $\omega \in \mathbb{R}^n$,用一个 $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^n$ 来做扰动, 并假设这个扰动是 "小" 的. 我们想知道向量场 $\omega + f$ 的积分曲线的微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega + f(x)$ 等价于未扰动时的积分曲线方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega$.

更加明确地说,我们想知道是否存在一个接近恒等映射的微分同胚 $U : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$,使得 $U'(U^{-1})\omega = \omega + f$?[①] (我们记 $U = \mathrm{id} + u$, 其中 $u : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个小扰动, 我们约定 $u(x)$ 和它在 $\mathbb{T}^n$ 中的像通过典则映射 $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 等同起来.)

首先, 当 $n = 1$ 而 $f =$常数时, 只要 $f \neq 0$, 问题就无解; 我们必须给 f 加上一个适当的积分条件. 为此, 我们引进 n 个向量场 $p_1, \cdots, p_n \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$ 使得 $\displaystyle\int_{\mathbb{T}^n} p_j \,\mathrm{d}x$ 是相互独立的,并对于 $t \in \mathbb{R}^n$, $U = \mathrm{id} + u$,定义

$$\Phi(u, t) = U'(U^{-1})\,\omega + \sum t_j p_j.$$

我们需要解的方程 $(*)$ 就是

$$\Phi(u, t) = \Phi(0, 0) + f,$$

这意味着 U 的共轭作用把 ω 变成 $\omega + f - \sum t_j p_j$.

在 III.C.4 节中我们将证明下述定理:

定理 存在一个 $C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$ 中 0 点的邻域 W, 使得对于任意的向量场 $f \in W$, 存在接近 0 的 $t \in \mathbb{R}^n$ 和一个接近恒等映射的 $\mathbb{T}^n$ 上微分同胚, 把 $\omega + f - \sum t_j p_j$ 共轭映到 ω.

现在我们来描述这个问题中出现的 "光滑性缺失".

a) 首先计算 $\Phi'(0, 0)(v, t)$: 记 $U = \mathrm{id} + v$,我们有

$$\begin{aligned}\Phi(v, t) - \Phi(0, 0) &= U'(U^{-1})\omega + \sum t_j p_j - \omega \\ &= v'(U^{-1})\omega + \sum t_j p_j \\ &= v'(\omega) + \sum t_j p_j + v \text{ 的二次项},\end{aligned}$$

这样 $\Phi'(0, 0)(v, t) = \omega(v) + \sum t_j p_j$, 其中 $\omega(v)$ 表示向量场 ω 对 v 的微分作用 $\left(\omega(v) = \sum \omega_j \dfrac{\partial v}{\partial x_j}\right)$.

[①] 译校者注: 这里 $U'(U^{-1})\omega$ 是指向量场 ω 在 U 的线性化映射下的像, 即 $U_*\omega$.

b) 为了解 $\mathbb{T}^n$ 上的常系数方程 $\omega(v)=h$, 我们将两边都作 Fourier 展开

$$h(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}h_k\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\langle k,\,x\rangle},\quad v(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}v_k\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\langle k,\,x\rangle}.$$

方程就化为

$$\forall k\in\mathbb{Z}^n,\qquad h_k=2\mathrm{i}\pi\langle k,\,\omega\rangle v_k.$$

特别我们有 $h_0=0$ (即 $\int_{\mathbb{T}^n}h\,\mathrm{d}x=0$); 在此情形下方程 $\Phi'(0,\,0)(v,\,t)=g\Leftrightarrow\omega(v)=g-\sum t_jp_j=h$, 这样我们就要求 $\int_{\mathbb{T}^n}g\,\mathrm{d}x=\sum t_j\int_{\mathbb{T}^n}p_j\,\mathrm{d}x$, 我们知道只有唯一一组 t_j 满足这一条件. 选择这样的 t_j, 从现在起我们假设

$$\forall k\in\mathbb{Z}^n,\,k\neq0\Longrightarrow\langle k,\,\omega\rangle\neq0.\tag{2.1.1}$$

在此假设下,存在由下式给出的唯一的 v_k:

$$v_0=0,\qquad v_k=\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\frac{h_k}{\langle k,\,\omega\rangle}\qquad(k\neq0).$$

然而, 尽管我们有 (2.1.1), $\langle k,\,\omega\rangle$ 还是可以非常之小: 我们称之为 “小除子”.

c) 我们来讨论假设 (2.1.1). 一个经典结果 (习题 C.1) 是这个假设等价于方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\omega$ 的每一条解曲线在 $\mathbb{T}^n$ 上都是稠密的.

此外,为了得到 v_k 的一个合理的控制, 我们还希望把 (2.1.1) 加强为

$$\exists\tau>0,\,\forall k\in\mathbb{Z}^n,\,k\neq0,\qquad|\langle k,\,\omega\rangle|\geqslant\frac{C}{|k|^\tau}.\tag{2.1.1'}$$

这是下述引理的讨论对象.

引理 若 $\tau>n-1$, 对几乎所有的 $\omega\in\mathbb{R}^n$, 存在 $C=C_\omega$,使条件 (2.1.1′) 成立.

证明 对于一个固定的球 B, 和 $B_{k,\,\varepsilon}=\{\omega\in B,\,|\langle k,\,\omega\rangle|\leqslant\varepsilon|k|^{-\tau}\}$. 因为[①]

$$m(B_{k,\,\varepsilon})\leqslant\text{常数}\cdot\varepsilon|k|^{-\tau-1},$$

我们有

$$m\left(\cup_{k\neq0}B_{k,\,\varepsilon}\right)\leqslant\text{常数}\cdot\varepsilon\sum|k|^{-\tau-1}\leqslant\text{常数}\cdot\varepsilon,$$

这样

$$m\left(\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{k\neq0}B_{k,\,\varepsilon}\right)=0.$$

[①]译校者注: 这里 m 表示 Lebesgue 测度.

d) 我们来估计 v; 注意到

$$v = h_s * E,$$①

其中

$$h_s = \sum_{k \neq 0} |k|^s h_k \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi \langle k,\, x \rangle},$$

而

$$E(x) = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi \langle k,\, x\rangle} \frac{1}{\langle k,\, \omega \rangle |k|^s}.$$

如果 E 是可积的, 通过直接计算 $h_s * E$, 我们得到, 在 Hölder 范数下, $\|v\|_a \leqslant C\|h_s\|_a$, 和 $\|h_s\|_a \leqslant C\|h\|_{a+s}$, 因为 $h_s = \left(\dfrac{|D_x|}{2\pi}\right)^s h$ (参见习题 A.2).

最后, 下述引理 (习题 C.2) 告诉我们对于哪些 s 的值, 函数 E 是可积的:

引理 若 ω 满足 (2.1.1′), 且若 $s > \tau > n-1$, 则

$$\sum_{k \neq 0} \frac{1}{|\langle k,\, \omega \rangle| |k|^s} < +\infty,$$

且 E 是连续的.

综上所述, 我们有下述估计: 若 $s > \tau$, 则对于任意 g, (*) 在 0 点的线性化方程 $\phi'(0,\, 0)(v,\, t) = g$ 存在解 $(v,\, t)$, 满足

$$\|v\|_a + |t| \leqslant C\|g\|_{a+s}. \tag{2.1.2}$$

在这个例子中, 我们看到 "精度的损失" 可以非常之大, 且 (通过 "小除子" $\langle k,\, \omega\rangle$ 的值) 依赖于 ω 的选取.

III.C.2.2 用 Nash–Moser 技巧来处理等距嵌入的例子

尽管 B.2 节中的问题有一个 "简单" 解法, 我们认为简单介绍一下 Nash 的原始证明思路还是有启发作用的.

根据 B.2 节, 需要求解的方程是

$$\phi(u) = \phi(u_0) + f, \tag{*}$$

其中 $\phi(u) = {}^t u' u'$, 而 u_0 是自由嵌入.

ϕ 关于 u 的导数是

$$\phi'(u)v = {}^t u' v' + {}^t v' u'.$$

①译校者注: 这里我们是在环面上对相应的 Haar 测度 (和 Lebesgue 测度相同) 做卷积.

为了解方程 $\phi'(u)v = g$ (其中 g 是对称的), 我们附加方程 ${}^tu'v = 0$, 微分后得到 ${}^tu''v + {}^tu'v' = 0$; 这样只需要选取 v 使满足 ${}^tu'v = 0$ 和 ${}^tu''v = -\frac{g}{2}$; 若 u 和 u_0 很接近, 这些方程构成了一个最大秩的线性方程组, 那么只要我们所选取的 v 是在 (线性独立) 向量 $\partial_j u$, $\partial^2_{jk}u$ 所张成的空间里, 解就是唯一的.

于是 $\phi'(u)v = g$ 的解具有形式 $v = M(u)g$, 其中 $M(u)$ 是一个系数是作用在 u 上的二阶算子的矩阵.

这里, "导数的缺失" $r' = 2$ 来自线性化方程的系数中含有的初值; 根据第 II 章性质 A.2.1.1, 我们有估计

$$\|v\|_s \leqslant C_s(\|g\|_s + \|g\|_0\|u\|_{s+2}). \tag{2.2.1}$$

III.C.3 柔性估计

我们首先引进柔性映射的概念.

III.C.3.1 柔性映射

我们知道, $u_0 \in C^\infty(M)$ 在 $C^\infty(M)$ 中的邻域同时也对于某个适当的 μ 来说也是 C^μ 中的邻域; 我们称之为 u_0 的一个 μ- 邻域.

定义 设 $u \mapsto \Phi(u)$ 是从 $C^\infty(M, \mathbb{R}^p)$ 中开集 U 到 $C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ 的连续映射. 我们称 Φ 是**柔性**的, 若对于任意的 $u_0 \in U$, 存在 u_0 的邻域 $V, b \geqslant 0, r \geqslant 0$, 和常数 C_s, 使得

$$\forall u \in V, \forall s \geqslant b, \quad |\Phi(u)|_s \leqslant C_s(1 + |u|_{s+r}).$$

注意到这里的估计并不是在整个 U 上, 而仅仅是在 V 上成立, 且其中的系数 C_s, b 和 r 可能依赖于 u_0 和 V.

为简单起见, 在这里我们只给出了对于 $C^\infty(M)$ 上映射的相关定义; 它可以延拓到同类型的更大的函数空间上去 (参见 [H7, H9]). 我们把下述两个性质留做习题 (习题 C.3 和 C.4)

性质 3.1.1 两个柔性映射的复合还是柔性的.

性质 3.1.2 若线性映射 Φ 是柔性的, 则存在 C_s, b 和 r 使得

$$\forall u \in C^\infty, s \geqslant b, \quad |\Phi(u)|_s \leqslant C_s|u|_{s+r}.$$

柔性映射定义的关键之处在于我们要求有一个对于范数 $|u|_{s+r}$ 的线性估计, 尽管一般说来 Φ 是 "非线性" 的. 而且, 只要 $u \in V$, 这一估计就对任意的 s 都成立, 这样就只牵涉到 u 的有限多阶导数.

例 设 F 对于它的各个变量都是 C^∞ 函数, 且记

$$\Phi(u) = F(x, u, \cdots, u^{(\alpha)}, \cdots),$$

其中 u 是 M 上实值 C^∞ 函数, 且 $u^{(\alpha)}=\partial_x^\alpha u$, $|\alpha|\leqslant m$.

映射 Φ 是柔性的, 因为对于 u_0, 在以 u_0 为中心的一个 C^m- 球中,根据第 II 章性质 A.2.2, 我们有估计 (对于 $s\geqslant 0$) $|\Phi(u)|_s\leqslant C_s(1+|u|_{s+m})$ (在 C^s 范数或者 H^s 范数下).

我们将看到,事实上许多自然的非线性映射都是柔性的.

III.C.3.2 一些自然的柔性映射

我们已经知道 (第 II 章性质 A.2.1.1 和性质 A.2.2),乘积 uv 和复合 $F(u)$ ($F\in C^\infty$) 对于 Hölder 和 Sobolev 空间都是柔性的.

在实际应用中,另外两种情况也是有用的 (参见第 II 章关于整数指数 Hölder 空间的注 A.1.5).

性质 3.2.1 若 $\alpha\geqslant 1$ 且 $u, v\in C^\alpha$, 则 $u\circ v\in C^\alpha$ 且

$$\|u\circ v\|_\alpha\leqslant C(\|u\|_\alpha\|v\|_1^\alpha+\|u\|_1\|v\|_\alpha+\|u\|_0). \tag{3.2.1}$$

证明 根据关于两个函数乘积的不等式,我们有:

$$\begin{aligned}\|u\circ v\|_\alpha&\leqslant\|u\|_0+\|(u'\circ v)v'\|_{\alpha-1}\\&\leqslant C(\|u\|_0+\|u'\circ v\|_{\alpha-1}\|v'\|_0+\|u'\circ v\|_0\|v'\|_{\alpha-1}).\end{aligned}$$

最后一项可以由 $\|u\|_1\|v\|_\alpha$ 所控制. 若 $\alpha\leqslant 2$, $\|u'\circ v\|_{\alpha-1}\leqslant C\|u\|_\alpha\|v\|_1^{\alpha-1}$, 这样此时性质成立. 若 $\alpha>2$, 假设 (3.2.1) 对于 $\alpha-1$ 已经得到证明, 我们有

$$\|u'\circ v\|_{\alpha-1}\|v'\|_0\leqslant C(\|u'\|_{\alpha-1}\|v\|_1^\alpha+\|u'\|_1\|v\|_{\alpha-1}\|v\|_1+\|u'\|_0\|v\|_1),$$

这样余下的工作就是给出中间那一项的一个上界. 但是根据凸性 (第 II 章 A.1.5 节)

$$\begin{aligned}\|u\|_2\|v\|_{\alpha-1}\|v\|_1&\leqslant C\left(\|u\|_1^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}\|u\|_\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)\left(\|v\|_1^{\frac{1}{\alpha-1}}\|v\|_\alpha^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}\right)\|v\|_1\\&\leqslant C(\|u\|_1\|v\|_\alpha)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}(\|u\|_\alpha\|v\|_1^\alpha)^{\frac{1}{\alpha-1}};\end{aligned}$$

再利用 $a^\lambda b^{1-\lambda}\leqslant C(a+b)$, 我们就得到 (3.2.1). □

性质 3.2.2 设 B_1 和 B_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个凸紧集, 且 $u: B_1\to B_2$, $f: B_2\to\mathbb{R}^n$ 满足对于 $x\in B_1$,有 $f(u(x))=x$. 那么对于 $\alpha\geqslant 1$, 我们有

$$\|u\|_\alpha\leqslant C\|f\|_\alpha, \tag{3.2.2}$$

其中 C 只依赖于 α 和 $\|u\|_1$, $\|f\|_1$ 的一个界.

证明 我们有 $f'(u(x))u'(x) = \mathrm{id}$, 这样 $u' = (f' \circ u)^{-1}$: 因为 (对于可逆矩阵 A) 映射 $A \mapsto A^{-1}$ 是 C^∞ 的, 我们得到

$$\|u\|_\alpha \leqslant \|u\|_0 + \|u'\|_{\alpha-1} \leqslant C(1 + \|f' \circ u\|_{\alpha-1}) \leqslant C\|f' \circ u\|_{\alpha-1},$$

因为在任何情况下都有 $\|f'\|_0 \geqslant$ 常数 > 0. 不仅如此, 当 $\alpha - 1 \leqslant 1$ 时, 直接由定义可以得到

$$\|f' \circ u\|_{\alpha-1} \leqslant C(1 + \|f'\|_{\alpha-1}\|u\|_1^{\alpha-1}) \leqslant C\|f\|_\alpha,$$

这样就得到 (3.2.2). 若 $\alpha > 2$, 性质 3.2.1 给出

$$\|f' \circ u\|_{\alpha-1} \leqslant C(\|f'\|_{\alpha-1}\|u\|_1^{\alpha-1} + \|f'\|_1\|u\|_{\alpha-1} + \|f\|_1),$$

且中间项可以通过递归方式由 $\|f\|_2\|f\|_{\alpha-1}$ 来估计: 和性质 3.2.1 同样的 "凸性" 计算就可以给出所需的估计. □

III.C.3.3 微分方程的解

可以证明, 一个微分方程组的解, 作为已知条件和系数的函数, 是一个柔性映射. 我们将用两个初等且精确叙述的例子来阐述这个 (故意陈述得很模糊) 的注记.

III.C.3.3.1 一个具体的计算

性质 3.3.1 设 $C_{2\pi}^\infty$ 是 2π 周期 C^∞ 函数的空间. 设 $f \in C_{2\pi}^\infty$, $c = \int_0^{2\pi} f\,\mathrm{d}x \neq 0$, 并考虑微分方程 $y' + fy = k$, 其中 $k \in C_{2\pi}^\infty$. 则这个方程具有唯一解 $y \in C_{2\pi}^\infty$, 且 (如果在 $C_{2\pi}^\infty$ 上赋 C^s 范数的话, $s \geqslant 0$) 映射 $(f, k) \mapsto y$ 是柔性的.

证明 我们把所有的东西都具体计算出来: 若 $F(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$, 我们记 $y = \mathrm{e}^{-F}z$, 则方程就变成 $z' = k\mathrm{e}^F$, 于是就得到一般的解 $y = C\mathrm{e}^{-F} + \mathrm{e}^{-F}\int_0^t \mathrm{e}^{F(x)}k(x)\,\mathrm{d}x$. 条件 $y(0) = y(2\pi)$ 可以写作

$$C = C\mathrm{e}^{-c} + \mathrm{e}^{-c}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^F k\ \mathrm{d}x, \text{由此得到 } C = \frac{1}{\mathrm{e}^c - 1}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^F k\ \mathrm{d}x.$$

根据这样的 C 通过上述公式得到的 y 实际上定义了从开集 $U \subset C^\infty([0, 2\pi])$ (其中 $\int_0^{2\pi} f\,\mathrm{d}x \neq 0$) 到 $C^\infty([0, 2\pi])$ 的映射 $\tilde{S}$. 而根据性质 3.1.1, 这个映射作为柔性映射 ($f \mapsto F$, $F \mapsto \mathrm{e}^{-F}$, 等等) 的复合也是柔性的. 它的限制 $\tilde{S}|_{C_{2\pi}^\infty}$ 把 $C_{2\pi}^\infty$ 映到其自身, 从而也是柔性的. □

III.C.3.3.2 一个先验估计

与上例中基于显式 "看出" 解的柔性不同, 这里我们将从方程本身出发直接得到一个估计. 这一过程是非常重要的, 因为它可以推广到很多重要的偏微分方程的类型上去: 紧流形上的椭圆方程组, 各式各样 "边界" 问题, 等等.

性质 3.3.2 设 $A(t)$ 是 $[a, b]$ 上一个 C^∞ 的 $(n\times n)$ 矩阵函数. 考虑方程组 $Y'+AY=k$,其中 Y 在 $\mathbb{C}^n$ 中取值, 且满足初值条件 $Y(a)=Y_0$. 那么对于任意的 $n\in\mathbb{N}$, 我们有估计

$$\|Y\|_{n+1}\leqslant C\Big(\|k\|_n+(\|k\|_0+|Y_0|)(1+\|A\|_n)\Big), \tag{3.3.2}$$

其中 C 只依赖于 $\|A\|_0$.

证明 a) 我们先来证明不等式 $\|Y\|_0\leqslant C(\|k\|_0+|Y_0|)$. 为此, 我们如第 II 章 C 部分中一样引进一个 "权重" $\mathrm{e}^{-\lambda t}$, 并记 $\|Y\|=\|\mathrm{e}^{-\lambda t}Y\|_0$. 方程可以写作

$$Y(t)=Y_0+\int_a^t[k(s)-A(s)Y(s)]\,\mathrm{d}s,$$

其中

$$|\mathrm{e}^{-\lambda t}Y(t)|\leqslant \mathrm{e}^{-\lambda t}|Y_0|+\mathrm{e}^{-\lambda t}\int_a^t|k(s)|\,\mathrm{d}s+\mathrm{e}^{-\lambda t}\int_a^t \mathrm{e}^{\lambda s}|A(s)|\mathrm{e}^{-\lambda s}|Y(s)|\,\mathrm{d}s,$$

即

$$\|Y\|\leqslant C_\lambda|Y_0|+C_\lambda\|k\|_0+\|A\|_0\|Y\|\sup_t\left(\mathrm{e}^{-\lambda t}\int_a^t \mathrm{e}^{\lambda s}\,\mathrm{d}s\right).$$

而这里的 "sup" 项具有上界 $1/\lambda$, 因此 $\lambda=2\|A\|_0$ 就给出预期的估计, 这样由方程我们就对于 $n=0$ 得到 (3.3.2).

b) 我们假设 (3.3.2) 对于 $n-1$ 已经被证明了: 方程给出

$$\begin{aligned}\|Y\|_{n+1}=\|Y\|_0+\|Y'\|_n&\leqslant\|k\|_n+C(\|A\|_0\|Y\|_n+\|Y\|_0(1+\|A\|_n))\\&\leqslant\|k\|_n+C\left\{\|k\|_{n-1}+(\|k\|_0+|Y_0|)(1+\|A\|_{n-1})\right\}\\&\quad+C\left\{(\|k\|_0+|Y_0|)(1+\|A\|_n)\right\},\end{aligned}$$

于是 (3.3.2) 对于任意的 n 都成立. □

III.C.3.4 回到经典的例子

a) 在例 C.2.1 中,我们只计算了 $\Phi'(0,0)$. 现在我们来解释如何求 $\Phi'(u,s)(v,t)$: 考虑曲线 $U_\theta=\mathrm{id}+u+\theta v$, 它在对应于 $\theta=0$ 的点 $\mathrm{id}+u$ 以 v 为切向量; 我们需要在 $\theta=0$ 处计算 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\{\Phi(u+\theta v,\,s+\theta t)\}$,其中

$$\Phi(u+\theta v,\,s+\theta t)=U'_\theta(U_\theta^{-1})\,\omega+\sum(s_j+\theta t_j)p_j.$$

记 $U_\theta=U_0\circ T_\theta$. 那么 $T_0=\mathrm{id}$, 而 $v=\dot U_0=U_0'\dot T_0$, 这里 "." 表示对于 θ 求导数. 因为 $U'_\theta(U^{-1})\omega=U_{\theta*}\omega=U_{0*}T_{\theta*}\omega$,我们有

$$\dot U_{\theta*}\omega=U_{0*}\dot T_{\theta*}\omega,$$

而在另一方面，在 $\theta = 0$ 处对等式

$$(T_{\theta *}\omega)(T_\theta(x)) = T'_\theta(x) \cdot \omega$$

求导,我们得到 (因为 ω 是一个常数)

$$\dot{T}_{0*}\omega(x) = \dot{T}'_0(x) \cdot \omega.$$

最后,

$$\Phi'(u,\, s)(v,\, t) = U_{0*}\dot{T}'_0\omega + \sum t_j p_j,\ \text{其中}\ \dot{T}'_0\omega = \omega(\dot{T}_0) = \omega({U'_0}^{-1} v).$$

我们由此得到方程 $\Phi'(u,\, s)(v,\, t) = g$ 的解,同时有估计

$$\|v\|_a + |t| \leqslant C_a(\|g\|_{s+a} + \|g\|_0\|u\|_{s+a+1}), \tag{3.4.1}$$

这里的 s 和 C.2.1 节中的是一样的.

我们还再次注意到,解 $(v,\, t)$ 关于 g 和系数 $(u,\, s)$ 的估计是柔性的.

考虑到这个估计，C.2 节中陈述的定理是下述 Nash–Moser 定理的一个推论.

b) 类似地，对等距嵌入问题中出现的线性化方程 $\phi'(u)v = g$(参见 C.2.2 节) 求解可以给出一个解 v,通过柔性估计依赖于 g (且关于 g 线性) 和 “系数”u: 若 u 是在 u_0 的一个 C^2 邻域内，则对于任意的 $s \geqslant 0$,

$$\|v\|_s \leqslant C_s(\|g\|_s + \|g\|_0\|u\|_{s+2}).$$

III.C.3.5 总结

Nash–Moser 定理的主要假设是 Φ 和 ψ 是柔性的: 这是一个合理的假设，我们在 C.3.1 至 C.3.3 各节中看到的一般性结果, 和 C.2, C.3.4 中研究的 “具有历史意义的” 例子,都说明了这一点.

III.C.4 Nash–Moser 定理

对于紧流形 M,我们考虑空间 $C^\infty(M)$ 里的某些函数族，具体说来是 Hölder 函数构成的空间，其相应的范数为 $\|\ \|_s$. 设 $u_0 \in C^\infty(M, \mathbb{R}^p)$, 并设 Φ 是定义在 $C^\infty(M, \mathbb{R}^p)$ 中 u_0 的一个 μ- 邻域 (对适当的 μ) 上的一个取值在 $C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$ 中的映射. 我们做下述两个假设:

$(\mathscr{H}_1)$ Φ 在 u_0 的一个 μ- 邻域中是 C^2 类的 (在 III.C.1 节中解释的弱意义下) , 且对于适当的 $a,\, b,\, c \geqslant 0$ 和任意的 $\alpha \geqslant 0$ 满足柔性估计

$$\|\Phi''(u)(v_1,\, v_2)\|_\alpha \leqslant C\left\{\|v_1\|_a\|v_2\|_a(1 + \|u\|_{\alpha+b}) + \|v_1\|_a\|v_2\|_{\alpha+c} + \|v_2\|_a\|v_1\|_{\alpha+c}\right\}.$$

$(\mathscr{H}_2)$ 对于 $C^\infty(M, \mathbb{R}^p)$ 里 u_0 的一个 μ'- 邻域中的 u,存在线性映射 $\psi(u) : C^\infty(M, \mathbb{R}^q) \to C^\infty(M, \mathbb{R}^p)$ 使得 $\Phi'(u)\psi(u) = \mathrm{id}$, 且对于适当的 $\lambda,\, d \geqslant 0$ 和任意 $\alpha \geqslant 0$ 满足柔性估计

$$\|\psi(u)g\|_\alpha \leqslant C\left\{\|g\|_{\alpha+\lambda} + \|g\|_\lambda(1 + \|u\|_{\alpha+d})\right\}.$$

我们注意到 Φ 和 ψ 本来只是对 C^∞ 函数有定义. 现在我们可以陈述 Nash–Moser 定理了.

定理 设 Φ 满足 $(\mathscr{H}_1)$ 和 $(\mathscr{H}_2)$, 且 α 满足 $\alpha \geqslant \mu$, $\alpha \geqslant \mu'$, $\alpha \geqslant d$, $\alpha > \lambda + a + c$, $\alpha > a + 1/2 \sup(\lambda + b, 2a)$, $\alpha \notin \mathbb{N}$. 则

i) 存在原点的一个 $(\alpha + \lambda)$- 邻域 W 使得对于 $f \in W$, 方程

$$\Phi(u) = \Phi(u_0) + f \tag{$*$}$$

有一个解 $u = u(f) \in C^\alpha$. 而且

$$\|u(f) - u_0\|_\alpha \leqslant C\|f\|_{\alpha+\lambda}.$$

ii) 若存在非整数 $\alpha' > \alpha$ 使得 $f \in W \cap C^{\alpha'+\lambda}$, 则我们构造的解 $u(f)$ 是 $C^{\alpha'}$ 中元素, 且具有相应估计. 特别地, 若 $f \in W \cap C^\infty$, 则 $u(f) \in C^\infty$.

这里, 方程 $(*)$ 表示存在序列 $u_j \in C^\infty(M)$ 满足对于任意的 $\varepsilon > 0$, 在 $C^{\alpha-\varepsilon}$ 中 $u_j \to u$, 且在 $C^{\alpha+\lambda-\varepsilon}$ 中 $\Phi(u_j) \to \Phi(u_0) + f$.

III.C.4.1 求解方案

正如我们在 III.C.1 节中说过的那样, 这个方案是一种Newton **方法**结合了所考虑函数的光滑化.

a) 一个 "纯粹" 的 Newton 方法将推出如下事实.

假设我们已经定义了 $u_0, \cdots, u_n$, 现在试图用 $u_{n+1} = u_n + \Delta u_n$ 来定义 u_{n+1}. 对于 $k \leqslant n$, 记 $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$, 我们可以根据等式

$$\Phi(u_{k+1}) = \Phi(u_k) + \Phi'(u_k)\Delta u_k + \varepsilon_k$$

来定义 "二阶误差" ε_k (到目前为止, 其实我们只知道 $\varepsilon_0, \cdots, \varepsilon_{n-1}$).

我们将选择一个满足 $\Phi'(u_n)\Delta u_n = \gamma_n$ 的 Δu_n(γ_n 待定), 使得 ε_n 可以用来衡量 $\Phi(u_{n+1})$ 与目标 $\Phi(u_0) + f$ 之间的距离.

将上述方程加在一起, 我们得到 (取 $\gamma_k = \Phi'(u_k)\Delta u_k$):

$$\Phi(u_{n+1}) = \Phi(u_0) + \sum_0^n \gamma_k + \sum_0^n \varepsilon_k;$$

这样 γ_n 就由

$$\sum_0^n \gamma_k + E_n = f \tag{4.1}$$

来定义, 其中 $E_n = \sum_0^{n-1} \varepsilon_k$ 是 "累积误差", 使得

$$\Phi(u_{n+1}) = \Phi(u_0) + f + \varepsilon_n \quad \text{及} \quad \gamma_n = f + \Phi(u_0) - \Phi(u_n).$$

因为我们希望得到 $\varepsilon_n \to 0$, 在形式上,该方程给出 (*).

b) 我们看到这样一个方案是不可行的, 因为 Δu_n 的 "信息区间" 越来越小,而我们知道这意味着什么.

我们现在来引进第 II 章 A.1.6 节中定义并研究过的逼近算子 S_θ, 且具有下述性质 ($\theta \geqslant 1$, α 和 β 在一个有限区间中):

i) $\|S_\theta u\|_\beta \leqslant C\|u\|_\alpha$, $\beta \leqslant \alpha$

ii) $\|S_\theta u\|_\beta \leqslant C\theta^{\beta-\alpha}\|u\|_\alpha$, $\beta \geqslant \alpha$

iii) $\|u - S_\theta u\|_\beta \leqslant C\theta^{\beta-\alpha}\|u\|_\alpha$, $\beta \leqslant \alpha$

iv) 对任意的 β, $\left\|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}S_\theta u\right\|_\beta \leqslant C\theta^{\beta-\alpha-1}\|u\|_\alpha$.

我们选择一个序列 $\theta_n = (\theta_0^{1/\varepsilon} + n)^\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$, $\theta_0 \geqslant 1$ 待定), 现在来把 "扰动" f 分解成

$$f = S_{\theta_0} f + \sum_{k\geqslant 0} \Delta_k \dot{f}_k,$$

$$\Delta_k = \theta_{k+1} - \theta_k, \quad \dot{f}_k = \frac{1}{\Delta_k}(S_{\theta_{k+1}} - S_{\theta_k})(f).$$

注意到如果我们选择 $\theta_n = C2^n$, 将得到通常的 f 的 Littlewood–Paley 分解 (参见 II.A.1 节). 选择一个更小的步长 Δ_k, 如我们将在下文 (III.C.4.3.b) 节) 中看到的那样, 可以给出一个更精细的讨论; 但每一个部分 $\dot{f}_k$ 的基本性质都保持了, 具体地说, 对于任意的 s,

$$\|\dot{f}_k\|_s = \left\|\frac{1}{\Delta_k}\int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}S_\theta f \,\mathrm{d}\theta\right\|_s \leqslant C \sup\left(\theta_k^{s-\alpha-1}, \theta_{k+1}^{s-\alpha-1}\right)\|f\|_\alpha. \tag{4.2}$$

现在, 我们并不像在 a) 中那样试图在第一步解 u_1 时就得到最终目标 $\Phi(u_0) + f$, 我们一小步一小步地走, 在求解 u_1 时我们以 $\Phi(u_0) + S_{\theta_0} f$ 为目标, 然后在求解 u_2 时以 $\Phi(u_0) + S_{\theta_1} f$ 为目标, 依此类推. 在每一步, 这也是最关键的改进, 我们并不求解方程 $\Phi'(u_n)\Delta u_n = \gamma_n$, 而是去求解 $\Phi'(v_n)\Delta u_n = \gamma_n$, 其中 $v_n = S_{\theta_n} u_n$.

这样我们的求解方案就变成: 假设已经定义了 $u_0, u_1, \cdots, u_n$,我们试图用形如 $u_{n+1} = u_n + \Delta u_n$ 的等式来定义 u_{n+1}, 这里 $\Delta u_n = \psi(v_n)\gamma_n$ (这是对 $\Phi'(v_n)$ 求得的解), 而 γ_n 待定. 类似的, 对于 $k \leqslant n-1$, 我们记

$$u_{k+1} - u_k = \Delta u_k = \psi(v_k)\gamma_k.$$

和在 a) 中一样, 对于 $k \leqslant n$, 我们记

$$\Phi(u_{k+1}) - \Phi(u_k) = \gamma_k + \varepsilon_k,$$

其中

$$\varepsilon_k = \varepsilon'_k + \varepsilon''_k,$$
$$\varepsilon'_k = \{\Phi'(u_k) - \Phi'(v_k)\}\,\Delta u_k,$$
$$\varepsilon''_k = \Phi(u_{k+1}) - \Phi(u_k) - \Phi'(u_k)\Delta u_k.$$

误差项 ε''_k 是通常的 Newton 方法中的“二阶误差”,而 ε'_k 是一个新的“代换误差”,它是我们通过在 Φ' 中把 u_k 换成 v_k 引进的.

我们还是定义 $E_n = \sum\limits_0^{n-1} \varepsilon_k$,那么就可以用

$$\sum_0^n \gamma_k + S_{\theta_n} E_n = S_{\theta_n} f \tag{4.1'}$$

来递归地定义 γ_n.

在本节的最后我们再引入一些记号: 为避免增量 Δ_n 在上述各种估计中反复出现, 我们对任意的 n 定义

$$\Delta u_n = \Delta_n \dot{u}_n,\ \ \gamma_n = \Delta_n g_n,\ \ \varepsilon_n = \Delta_n e_n,\ \ \varepsilon'_n = \Delta_n e'_n,\ \ \varepsilon''_n = \Delta_n e''_n,$$

这样

$$e'_n = \{\Phi'(u_n) - \Phi'(v_n)\}\,\dot{u}_n,$$
$$e''_n = \frac{1}{\Delta_n}\{\Phi(u_{n+1}) - \Phi(u_n) - \Phi'(u_n)\Delta_n \dot{u}_n\}.$$

III.C.4.2 归纳结构

现在剩下的就只是在 $\|f\|_\beta(\beta = \alpha + \lambda)$ 充分小的前提下证明序列 u_n 的存在性和收敛性了.

对于将在下文中确定的一个充分大的 $\delta > 0$ 和一个 $\tilde{\alpha} > \alpha$,我们做下述归纳假设:

(H_n) 对 $0 \leqslant k \leqslant n$ 和 $s \in [0, \tilde{\alpha}]$ (“信息区间”)

$$\|\dot{u}_k\|_s \leqslant \delta\theta_k^{s-\alpha-1}.$$

这样假设有 (H_n),在 III.C.4.3 节中我们将证明对于适当选取的参数 $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$.

最后, (H_0) 将单独处理.

下面是一些初步的注记.

a) 若 (H_n) 对于所有的 n 都是成立的, 那么由下述引理,(对于任意的 $\varepsilon > 0$) 序列 u_n 在 $C^{\alpha-\varepsilon}$ 中收敛到一个函数 $u \in C^\alpha$:

引理 4.2.1 设 $(u_\theta)_{\theta\geqslant\theta_0}$ 是一族 C^∞ 函数,满足

$$\|u_\theta\|_{a_j}\leqslant M\theta^{b_j-1},\ j=1,2,\quad 其中\quad b_1<0<b_2,\ a_1<a_2.$$

根据 $\nu b_1+(1-\nu)b_2=0$ 定义 ν, 以及 $a=\nu a_1+(1-\nu)a_2$; 若 $a\notin\mathbb{N}$,则

$$u=\int_{\theta_0}^{+\infty}u_\theta\ \mathrm{d}\theta\in C^a\quad 且\quad \|u\|_a\leqslant CM.$$

这个引理的要点在于定义 u 的积分对于 $a'<a$ 在 $C^{a'}$ 中是依范数收敛的,这里 a 正好是满足 $\|u_\theta\|_a\leqslant CM\theta^{-1}$ 的指标. (证明在习题 C.8 中给出.)

b) 现在来解释 (H_n) 的意义: 我们会得到 $u=u_0+\sum_{k=0}^{+\infty}\Delta_k\dot{u}_k$, 也就是说我们用分解 f 的过程的逆来构造 u. 我们要求的估计 (H_n) 其实也就是估计 (4.2),换句话说是我们 "有权" 要求 u 的一个块具有的性质. 当然,除非非常特殊的情况, $\dot{u}_k$ 不会是u 的 "标准块", 但是它们将起同样的作用 (例如,在标准 Littlewood–Paley 分解的情形, 一个 "标准块" 的谱在一个球壳内,这可以推出 (4.2), 但其逆并不成立).

c) 现在我们来证明若 $\alpha\geqslant\mu$, $\alpha\geqslant\mu'$, $0<\delta\leqslant\delta_0$, δ_0 充分小而 θ_0 充分大, 则 (H_n) 能够推出 u_{n+1} 和 v_{n+1} (以及联接它们的线段) 都在以 u_0 为中心的一个充分小的球中, 我们可以应用 $(\mathscr{H}_1)$ 和 $(\mathscr{H}_2)$. 这是下述引理的推论.

引理 4.2.2 (H_n) 推出 (记 $x_+=\sup(x,0)$)

i) $\|u_{n+1}-u_0\|_\alpha\leqslant C\delta$.

ii) 对一个有限区间中的 a, $\|S_{\theta_{n+1}}(u_{n+1}-u_0)\|_a\leqslant C\delta\theta_{n+1}^{(a-\alpha)_+}$.

iii) $\|(u_{n+1}-u_0)-S_{\theta_{n+1}}(u_{n+1}-u_0)\|_a\leqslant C\delta\theta_{n+1}^{a-\alpha}$, $0\leqslant a\leqslant\tilde{\alpha}$.

iv) $\|u_{n+1}-v_{n+1}\|_a\leqslant C\theta_{n+1}^{a-\alpha}$, $0\leqslant a\leqslant\tilde{\alpha}$.

v) 对一个有限区间中的 a, $\|v_{n+1}\|_a\leqslant C\theta_{n+1}^{(a-\alpha)_+}$.

证明 设 $U=u_{n+1}-u_0=\sum_{j=0}^{n}\Delta_j\dot{u}_j$, 引理 4.2.1 推出 $\|U\|_\alpha\leqslant C\delta$, 这样对于 $a\leqslant\alpha$ 我们就得到 i) 和 iii).

在另一方面, 对于 $a=\tilde{\alpha}$,

$$\|U\|_a\leqslant\delta\sum_{j=0}^{n}\Delta_j\theta_j^{a-\alpha-1}\leqslant C\delta\theta_{n+1}^{a-\alpha},$$

由此 iii) 得证.

我们记

$$u_{n+1}-v_{n+1}=u_0+U-S_{\theta_{n+1}}(u_0+U)=u_0-S_{\theta_{n+1}}u_0+U-S_{\theta_{n+1}}U,$$

这就证明了 iii) 推出 iv); 最后 i) 推出 ii),且

$$v_{n+1} = S_{\theta_{n+1}}(u_0 + U),$$

由此 v) 得证. □

因为 $\alpha \geqslant \mu, \alpha \geqslant \mu'$, i) 表明当 $\delta \leqslant \delta_0$ 时 u_{n+1} 在 $(\mathscr{H}_1)$ 和 $(\mathscr{H}_2)$ 所要求的 μ 和 μ'- 邻域的交集中; 不仅如此,

$$v_{n+1} - u_0 = S_{\theta_{n+1}}(u_{n+1} - u_0) + S_{\theta_{n+1}}u_0 - u_0,$$

这样由 ii) 得到在 θ_0 充分大的附加条件下对于 v_{n+1} 有同样结论.

我们还注意到定理的条件 $\alpha \notin \mathbb{N}$ 只是在证明引理 4.2.1 时用到.

III.C.4.3 归纳假设的证明

在上节中, 我们知道 u_{n+1} 和 v_{n+1} 在 u_0 的固定邻域中,使得我们可以定义 $\dot{u}_{n+1}$ 并应用 $(\mathscr{H}_1)$ 和 $(\mathscr{H}_2)$; 现在我们在假设有 (H_n) 的前提下证明 (H_{n+1}).

这是一个非常单调枯燥的工作,首先要估算误差 e_n, E_{n+1}, 然后是 g_{n+1},最后是 $\dot{u}_{n+1}$; 在做这一工作的时候我们必须密切注意所得估计的 "信息区间".

a) e'_k 的估计.

引理 对于 $0 \leqslant k \leqslant n$, $s \in [0, \tilde{\alpha} - \sup(b, c)]$, 我们有

$$\|e'_k\|_s \leqslant C\delta\theta_k^{L(s)-1}, \tag{4.3.1}$$

其中 $L(s) = \sup(s + a + c - 2\alpha, (s + b - \alpha)_+ + 2a - 2\alpha)$.

证明 我们有

$$e'_k = \{\Phi'(u_k) - \Phi'(v_k)\}\, \dot{u}_k = \int_0^1 \Phi''(v_k + t(u_k - v_k))(\dot{u}_k, u_k - v_k)\, \mathrm{d}t,$$

这样, 根据 $(\mathscr{H}_1)$,就有

$$\begin{aligned}\|e'_k\|_s \leqslant\ & C\|\dot{u}_k\|_a \|u_k - v_k\|_a (1 + \sup_t \|v_k + t(u_k - v_k)\|_{s+b}) \\ & + C\|\dot{u}_k\|_a \|u_k - v_k\|_{c+s} + C\|\dot{u}_k\|_{c+s} \|u_k - v_k\|_a \\ \leqslant\ & C\delta\theta_k^{L(s)-1},\end{aligned}$$

其中 $L(s) = \sup(s + a + c - 2\alpha, (s - b - \alpha)_+ + 2a - 2\alpha)$. □

b) e''_k 的估计. 我们有

$$e''_k = \Delta_k \int_0^1 (1 - t)\Phi''(u_k + t\Delta_k \dot{u}_k)(\dot{u}_k, \dot{u}_k)\, \mathrm{d}t,$$

且对于积分有一个和 e_k' 具有同样形式在同一个区间上的估计; 这样很明显只要适当选取 $\varepsilon > 0$, 我们就可以使 e_k'' 对于 e_k' 来说可以忽略不计, 因为 $\Delta_k \sim \varepsilon\theta_k^{1-1/\varepsilon}$. 所以误差 e_k 就可以由 (4.3.1) 来估计.

c) g_{n+1} 的估计. 回忆一下, 我们有

$$g_{n+1} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}}\left\{\dot{f}_n - (\dot{E}_n)_n - S_{\theta_{n+1}}e_n\right\}.$$

其中对于任意函数 w 和任意指标 s, 块 $\dot{w}_n = \frac{1}{\Delta_n}(S_{\theta_{n+1}} - S_{\theta_n})w$ 可以由不等式 (4.2) 估计. 特别在这里我们有

$$\|\dot{f}_n\|_s \leqslant C\theta_n^{s-\beta-1}\|f\|_\beta \quad (\beta = \alpha + \lambda),$$

而

$$\|(\dot{E}_n)_n\|_s \leqslant C\theta_n^{s-r-1}\|E_n\|_r;$$

我们选择最大的 r, 即 $r = \tilde{\alpha} - \sup(b, c)$, 而选择充分大的 $\tilde{\alpha}$ 使得级数 $\sum \Delta_j\theta_j^{L(r)-1}$ 发散 (即 $L(r) > 0$) 且 L 在 r 右侧具有斜率 1. 这样我们就有 $\|E_n\|_r \leqslant C\delta\theta_n^{L(r)}$ 且

$$\|(\dot{E}_n)_n\|_s \leqslant C\delta\theta_n^{s-r-1+L(r)} \leqslant C\delta\theta_n^{L(s)-1}, \tag{4.3.2}$$

因为若 $s \leqslant r$ 则 $L(r) \leqslant L(s) + r - s$(因为 $|L'| \leqslant 1$), 而由我们对 $\tilde{\alpha}$ 的选择, 若 $s \geqslant r$ 则 $L(r) = L(s) + r - s$. 类似的对于任意的 $s, \|S_{\theta_{n+1}}e_n\| \leqslant C\delta\theta_n^{L(s)-1}$. 正是为了在一个任意的 (有限)“指数区间” 上得到 g_{n+1} 的估计, 我们在 (4.1) 用 $S_{\theta_n}f$ 替代 f, 用 $S_{\theta_n}E_n$ 替代 E_n (由此得到 (4.1′)). 最后, 对于任意的 s 我们有

$$\|g_{n+1}\|_s \leqslant C\left(\delta\theta_{n+1}^{L(s)-1} + \theta_{n+1}^{s-\beta-1}\|f\|_\beta\right).$$

d) $\dot{u}_{n+1}$ 的估计. 由定义, $\dot{u}_{n+1} = \psi(v_{n+1})g_{n+1}$, 因此对于 $s \in [0, \tilde{\alpha}]$, 我们有

$$\|\dot{u}_{n+1}\|_s \leqslant C\left\{\|g_{n+1}\|_{s+\lambda} + \|g_{n+1}\|_\lambda(1 + \|v_{n+1}\|_{s+d})\right\},$$

即

$$\|\dot{u}_{n+1}\|_s \leqslant C\delta\theta_{n+1}^{L(s+\lambda)-1} + C\|f\|_\beta\theta_{n+1}^{s-\alpha-1} + C(\delta\theta_{n+1}^{L(\lambda)-1} + \|f\|_\beta\theta_{n+1}^{-\alpha-1})\theta_{n+1}^{(s+d-\alpha)_+}.$$

我们注意到把 u_{n+1} 换成 v_{n+1} 可以避免在求解 Φ' 的过程中因为 “为获得关于系数的信息所付出的代价” 而造成的信息区间的减小.

假设对于 $s \in [0, \tilde{\alpha}]$ 我们有下述条件, 那么就可以证明 (H_{n+1}) (在 (H_{n+1}) 中 δ

前面没有系数!),

i) $L(s+\lambda) < s-\alpha$,

ii) $\|f\|_\beta/\delta$ 很小,

iii) $L(\lambda)+(s+d-\alpha)_+ < s-\alpha$

iv) $(s+d-\alpha)_+ - \alpha \leqslant s-\alpha$

v) θ_0 充分大.

我们来研究这些条件: 为了满足 iv), 我们必须有 $\alpha \geqslant d$, 这同时也是充分的; 这样 iii) 等价于 $L(\lambda) < -\alpha$, 而 i) 可以由 $L(\lambda) < -\alpha$ 推出. 最后, $L(\lambda) < -\alpha$ 推出

$$\lambda+a+c-2\alpha < -\alpha \Leftrightarrow \alpha > \lambda+a+c$$

$$(\lambda+b-\alpha)_+ + 2a - 2\alpha < -\alpha \Leftrightarrow \alpha > a + 1/2\sup(\lambda+b,\, 2a).$$

这里的关键之处在于: 估计 (4.3.1) 中误差项的二阶性质反映在 $L(s)$ 的表达式里存在着形如 "-2α" 的项, 而估计的柔性推出 $|L'| \leqslant 1$; 正是这 "-2α" 项使我们可以选择 (充分大的) α 来完成归纳.

从现在开始, θ_0 由 v) 确定.

e) 如何得到 (H_0)? 因为 $g_0 = \dfrac{1}{\Delta_0} S_{\theta_0} f$,

$$\dot{u}_0 = \frac{1}{\Delta_0}\psi(S_{\theta_0}u_0)S_{\theta_0}f,$$

$$\|\dot{u}_0\|_s \leqslant \frac{C}{\Delta_0}\left\{\|S_{\theta_0}f\|_{s+\lambda} + \|S_{\theta_0}f\|_\lambda(1+\|S_{\theta_0}u_0\|_{s+d})\right\};$$

θ_0 已经确定, 我们只要取 f/δ 在任意范数中都充分小就可以得到 (H_0) 了. 考虑 d) 中的条件 ii), 我们选择 $\|f\|_\beta/\delta$ 充分小, 即可得到定理中的结论 i). □

III.C.4.4 所构造解的附加正则性

现在来证明定理的结论 ii). 我们设对于某个 $\alpha' > \alpha$ 有 $f \in W \cap C^{\alpha'+\lambda}$, 并选择 $\tilde{\alpha} > \alpha'$. 我们将利用 (对于任意 n 均成立的) 估计 (H_n) 来得到

$$\forall s \in [0,\, \tilde{\alpha}], \quad \|\dot{u}_n\|_s \leqslant 常数 \cdot \theta_n^{s-\alpha'-1}. \qquad (H_n')$$

如前, 引理 4.2.1 将帮助我们完成证明.

我们注意到, 在根据 (H_n) 得出的 $\dot{u}_{n+1}$ 的估计 (参见 III.C.4.3.d) 节) 中, 那些不含 $\|f\|_\beta$ 的项里 θ_{n+1} 的指数严格小于 $s-\alpha-1$. 在另一方面, 这一不等式中出现 $\|f\|_\beta$ 的理由是对于 $\dot{f}_n$ 的一个估计 (参见 III.C.3.4.c) 节); 这样我们可以对任意的

$\sigma > 0$ 用 $\|f\|_{\sigma+\lambda}\theta_{n+1}^{-\sigma-1}$ 来替代 $\|f\|_{\beta}\theta_{n+1}^{-\alpha-1}$. 这样我们证明了对于任意的 n 和任意的 $s \in [0, \tilde{\alpha}]$,

$$\|\dot{u}_{n+1}\|_s \leqslant 常数 \cdot (\theta_{n+1}^{s-\alpha-\gamma-1} + \|f\|_{\beta'}\theta_{n+1}^{s-\alpha'-1}),$$

其中 $\gamma > 0, \beta' = \alpha' + \lambda$. 特别地 (这里我们不考虑平凡的情形 $n = 0$)

$$\forall n, \ \|\dot{u}_n\|_s \leqslant 常数 \cdot \ \theta_n^{s-\rho-1},$$

其中 $\rho = \min(\alpha + \gamma, \alpha')$. 用这些新的估计式替代 (H_n), 我们可以重新回到我们的证明上来, 注意到这里获得的增量 γ 只依赖于 α 的一个下界, 从而对所有的 $\rho \geqslant \alpha$ 都成立. 这样在 k 次迭代以后, 我们得到

$$\forall n, \ \forall s \in [0, \tilde{\alpha}], \quad \|\dot{u}_n\|_s \leqslant 常数 \cdot \ \theta_n^{s-\rho_k-1},$$

其中 $\rho_k = \min(\alpha + k\gamma, \alpha')$.

对充分大的 k, 我们有 $\rho_k = \alpha'$, 就可以得到预期的估计 (H_n'). □

III.C.4.5 结论和注记

我们可以简略地将证明的思路陈述如下: 在 Newton 方法中我们只允许 (近似) 解的光滑化出现, 这样就避免了信息区间的缩小, 但是相应的代价是更差的估计; 但是由于这些柔性估计 "对大范数是线性的", Newton 方法中误差的二阶性质可以补偿这种损失.

我们只写出了 $C^\infty(M)$ 情形下的证明, 选取 Hölder 空间族. 这么做的理由是这样的话我们有引理 C.4.2.1, 进而有引理 C.4.2.2 中的 "恰当" 估计.

当然, 把上述过程移植到许多其他的情形和其他的函数空间并不是一件困难的事情: 但是我们要注意到引理 C.4.2.1 不再成立, 这将导致在引理 C.4.2.2 的估计中出现一个 (任意) 小的损失 $\varepsilon > 0$. (一个更为精细复杂的处理方法牵涉到 "修正" 所使用的函数空间族; 参见 [H7]).

第 III 章注记

本章的目的是在一些特定的环境下给读者以适当的工具来 "探测" 所谓 "Nash-Moser 征候".

本章中的例子可以分为三类. 在 A 节中, 我们研究 "椭圆" 的情形, 也就是线性化方程的解让我们有可能把所有的光滑性缺失都 "补偿" 回来. 这种情形都是用传统的隐函数定理来处理的: 部分例子取自 Hamilton [Ha].

在 B 节中, 我们所讨论的情形不能够归结到隐函数定理, 但是相应的 "光滑性缺失" 并不严重, 从而我们可以采用一种不动点定理方法. 我们认为流体力学中的拟线性双曲组是一个非常典型且不常出现在课本中: 这里的讲述方法受到 Majda[Ma1] 的启发. 用不动点方法处理等距嵌入问题是最近 Günther 的贡献 ([G]).

最后, C 节的主题是 Nash-Moser 定理, 该定理允许有任意大小 (但是固定) 的缺失. 这里我们仍然从 Hörmander 那里得益良多, 因为 III.C.4.4 的起源就是他在 Stanford 大学讲的课 (1977,未出版) 和他的论文 [H6]. 我们致力于阐明他所提出的求解方案可以通过修正 Newton 方法自然地得到.

当然,这个定理还有许多其他的表述形式: 读者可以参阅 Moser 的论文 [Mo], 而在 Hamilton 的 [Ha] 有关于 "柔性映射","柔性空间" 等内容的详细讨论, 和大量的例子以及参考文献.

从某种意义上说,这一章是前两章内容发展的结果, 它包含了相关概念 (柔性估计, 能量不等式, 等等) 的一个非常随意的陈述. 它还指出了解决一个 "扰动" 型非线性问题的关键在于求解 (连同柔性估计) 一个线性问题, 而这往往从本质上是拟微分的. Majda [Ma2] 包含了这个事实的一个很精彩的叙述, 可惜太过深奥,无法在这里讲述.

第 III 章习题

A.1. 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中单位圆盘,$W(D)$ 是 D 上满足

$$\|f\|_{W(D)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} < +\infty$$

的全纯函数 f 全体构成的空间.

a) 证明若 $f \in W(D)$, 且 g 在 f 在 $\overline{D}$ 上的值域的一个邻域里是全纯的, 则 $g \circ f \in W(D)$. (我们注意到 $\|h\|_{W(D)} \leqslant C \sup_{z\in D}(|h(z)| + |h''(z)|)$, 且 $W(D)$ 是一个代数; 然后考虑等式

$$f = f_1 + f_2,$$

其中 $f_2(z) = \sum\limits_{n>N} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$, 而我们选择充分大的 N 使得级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{g^{(n)}(f_1)}{n!} f_2^n$ 在 $W(D)$ 上是可定义且收敛的).

b) 设 f 在 $\mathbb{C}$ 上 0 点附近全纯, 使得 $f(0) = 0$, $f'(0) = \lambda$, 其中 $|\lambda| \in (0, 1)$. 证明对于任何 $\alpha \in \mathbb{C}^*$, 存在满足 $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \alpha$ 的在 0 点附近全纯的函数 φ, 使得对于 0 点的一个邻域内任意的 z,

$$f(\varphi(z)) = \varphi(\lambda z).$$

(记 $B = \{\psi \in W(D),\ \psi(0) = \psi'(0) = 0\}$, 对 $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ 研究由下式定义的取值在 B 中的映射 F,

$$F(\varepsilon, \psi)(z) = \frac{1}{\varepsilon} f(\varepsilon\alpha z + \varepsilon\psi(z)) - \alpha\lambda z - \psi(\lambda z),$$

其中 ψ 在 B 中 0 点的一个邻域内).

c) 对于 $|\lambda|>1$ 证明和 b) 类似的命题.

A.2. 设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球. 我们来构造一个满足 $\Delta A_0=\mathrm{id}$ 的有界线性算子 $A_0: C^{\rho-2}(B)\to C^{\rho}(B)$. (其中 $\rho>2$ 不是整数).

a) 构造 Δ 的一个基本解. 假设 $n\geqslant 3$, 证明 $\hat{E}(\xi)=-\dfrac{1}{|\xi|^2}$ 定义了 $E\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 满足 $\Delta E=\delta$.

若 $n=2$ 而 $z\in\mathbb{C}$ 满足 $\operatorname{Re} z<2$, 我们定义一个取值在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ 中的全纯函数

$$\hat{E}_z(\xi)=-\frac{1}{|\xi|^z}.$$

证明利用公式 $\hat{E}_z=\frac{1}{(z-2)^2}\Delta_\xi\hat{E}_{z-2}$ 可以把上述函数解析延拓到 $\mathbb{C}\setminus\{2\}$ 上, 由此得到

$$E=\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{|z-2|=1}E_z\,\mathrm{d}z$$

是一个满足 $\Delta E=\delta$ 的缓增分布 (有兴趣的读者可以把 E 具体算出来). 推出一个满足 $\Delta A_1=\mathrm{id}$ 的算子 $A_1:\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的存在性.

b) 设 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. 以 $(u_p)_{p>-1}$ 记其 Littlewood–Paley 分解. 证明存在 $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ 使得

$$\forall p\geqslant 0,\ \ u_p=2^{-2p}\chi(2^{-p}D)(\Delta u_p),$$

并由此得到若 $\rho>2$,

$$\Delta u\in C^{\rho-2}(\mathbb{R}^n)\text{可以推导出}u\in C^{\rho}(\mathbb{R}^n).$$

c) 利用一个嵌入算子 $C^{\rho-2}(B)\to C^{\rho-2}(\mathbb{R}^n)$, 构造 A_0.

B.1. 我们承认对于某个适当的 d 存在 C^∞ 单射 $u_1: M\to\mathbb{R}^d$. 证明如果任意度量 g 都可以由 (对适当的 N) $u: M\to\mathbb{R}^N$ 表示出来,则任意度量 g 可以由单射 u 表示 (寻找具有形式 (u_1, u_2) 的 u, 并利用 III.B.2.1 节中的 iii)).

B.2. a) 证明可以找到只依赖于 $|x|$ 的 $\chi: C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$,满足 $\int {}^t\chi'(y)\chi'(y)\,\mathrm{d}y=\mathrm{id}$.

b) 设 $a\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), A\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,且 A 可逆.

考虑由

$$u_{\varepsilon,y}=|\det A(y)|^{1/2}\varepsilon^{1-\frac{n}{2}}\chi\left(A(y)\frac{(x-y)}{\varepsilon}\right)a(y)$$

定义的映射族 $u_{\varepsilon,y}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. 证明当 $\varepsilon\to 0$ 时 (在 C_0^∞ 中) $\displaystyle\int {}^tu'_{\varepsilon,y}u'_{\varepsilon,y}\,\mathrm{d}y\to[a(x)]^2\,{}^tA(x)A(x)$.

c) 利用 M 上的一个单位分解 $1=\sum\psi_j^2$(参见第 I 章习题 6.1), 其中 $\psi_j\in C_0^\infty(\mathcal{U}_j)$ (其中 $\{\mathcal{U}_j\}$ 是 M 上由坐标邻域构成的有限开覆盖),把一个任意的度量写成 $g=\sum\psi_j^2 g$ 的形式.

由此借助于 a) 和 b) 推导出 g 能够用可表度量来逼近.

B.3. a) 验证由 $v(x) = \{x_i, x_jx_k\}(j \leqslant k)$ 定义的 $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N'}$ 是单射且满足 (2.2.1).

b) 证明若 $u : M \to \mathbb{R}^d$ 是单射, 则 $v \circ u$ 也是单射且满足 (2.2.1).

C.1. a) 设 $\omega \in \mathbb{R}^n$ 满足对于某个 $k \in \mathbb{Z}^n$, $k \neq 0$, $\langle k, \omega\rangle = 0$. 以 f 记 $x \mapsto \langle k, x\rangle$ 诱导的映射 $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^1$. 证明 $\mathbb{T}^n$ 上 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega$ 满足, 对于任意的 t, $f(x(t)) = f(x(0))$. 由此推出 x 的像不是稠密的.

b) 反之, 假设 III.C.2.1 节的 (2.1.1): 证明对于任意的连续函数 $f : T^n \to \mathbb{R}$, 和任意的路径 $x(t)$,

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(我们用三角多项式来逼近 f). 用反证法证明 x 的像是稠密的.

C.2* 设 $\omega \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$\exists \tau > n-1,\ \forall k \in \mathbb{Z}^n,\ k \neq 0,\ |\langle k, \omega\rangle| \geqslant \frac{C}{|k|^\tau}, \tag{2.1'}$$

并取 $s > \tau$.

通过将级数中的项根据 $|k|$ 和 $|\langle k, \omega\rangle|$ 的值的二进分解加以重组, 证明

$$\sum_{k\neq 0} |k|^{-s}|\langle k, \omega\rangle|^{-1} \leqslant 常数 + \sum_{p\geqslant 0}\ \sum_{j\geqslant 0,\, 2^{(p+1)\tau-j}\geqslant C} 2^{-ps}2^j N(2^{p+1}, 2^{-j}),$$

其中 $N(r, \varepsilon)$ 是满足 $|k| < r$ 和 $|\langle k, \omega\rangle| < \varepsilon$ 的整点 $k \neq 0$ 的个数.

证明 $N(r, \varepsilon)\varepsilon^{-\frac{n-1}{\tau}} \leqslant 常数 \cdot r^{n-1}$,并由此得到级数的收敛性.

C.3. 证明两个柔性映射的复合还是柔性的.

C.4. 证明若 ϕ 是线性且柔性的, 则我们有

$$|\phi(u)|_s \leqslant C|u|_{s+r}$$

(其中符号的意义见正文).

在下面的三个习题中我们将对于第 II 章习题 C.7 中的正对称方程组的一个解建立一个柔性估计. 习题 C.5 和 C.6 可以单独讨论.

C.5* **一个柔性的弱型 Gårding 不等式** 在 $\mathbb{T}^n$ 上, 考虑微分算子 $A = -\sum_{i,j} \partial_i a_{ij} \partial_j$, 其中 a_{ij} 是取值为 $N\times N$ Hermite 矩阵的 C^∞ 函数, 且 (对于某个 $\gamma > 0$, 作为 Hermite 矩阵) 满足

$$\forall x \in \mathbb{T}^n,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \gamma|\xi|^2\mathrm{id}.$$

我们来建立下述不等式

$$\forall u \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}^N), \quad (Au, u) \geqslant \frac{\gamma}{2}|u|_1^2 - C_0|u|_0^2, \tag{$*$}$$

其中 C_0 是一个只依赖于 γ 和

$$[A]_1 = \sup_{x\in\mathbb{T}^n} \sup_{i,j,k} |\partial_k a_{ij}(x)|$$

的常数.

a) 当 a_{ij} 为常数时,证明 (取 $C_0 = 0$, 并以 γ 取代 $\frac{\gamma}{2}$) 证明不等式 $(*)$. 由此得到对于任意点 x,都存在一个其半径可由 $[A]_1$ 控制的邻域 ω_x, 满足

$$\forall u \in C_0^\infty(\omega_x, \mathbb{C}^N), \quad (Au, u) \geqslant \frac{3\gamma}{4}|u|_1^2.$$

b) 利用和有限覆盖 $\mathbb{T}^n = \cup_j \omega_{x_j}$ 关联的一个单位分解 $\sum \varphi_j^2 = 1$ (第 I 章习题 6.1), 证明不等式 $(*)$.

C.6* **交换子的柔性估计** 设 $h = h(\xi)$ 是一个 C^∞ 函数,对于 $|\xi| \geqslant 1$ 是 m 次齐次的, 并设 $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. 则根据关于象征演算的 (第 I 章) 定理 4.1 和 L^2 连续性定理,对于任意的 $s \in \mathbb{R}$, $[h(D), a]$ 把 $H^{s+m-1}(\mathbb{R}^n)$ 映到 $H^s(\mathbb{R}^n)$, 且更精细地我们有

$$R_a = [h(D), a] - \frac{1}{\mathrm{i}}\sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial \xi_j}(D)$$

把 $H^{s+m-2}(\mathbb{R}^n)$ 映到 $H^s(\mathbb{R}^n)$. 我们来计算这些算子的模作为 a 的函数. 为此, 我们使用在第 II 章习题 A.5 引进的仿积的概念及相应的符号.

a) 证明 $[h(D), T_a]u = \sum\limits_p v_p$, 其中

$$v_p(x) = 2^{mp}\int \rho(y)(S_{p-2}a(x - 2^{-p}y) - S_{p-2}a(x))u_p(x - 2^{-p}y)\,\mathrm{d}y,$$

$\hat{\rho}(\xi) = \chi(\xi)h(\xi)$ (这里 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ 在球壳 $C_1 = \left\{\frac{1}{4} \leqslant |\xi| \leqslant \frac{5}{2}\right\}$ 的一个邻域内取值为 1).

由此得到

$$|[h(D), T_a]u|_s \leqslant C\|a\|_1|u|_{s+m-1},$$

和

$$\left|\left([h(D), T_a] - \frac{1}{\mathrm{i}}\sum_j T_{\frac{\partial a}{\partial x_j}}\frac{\partial h}{\partial \xi_j}(D)\right)u\right|_s \leqslant C\|a\|_2|u|_{s+m-2},$$

其中

$$\|a\|_k = \sum_{|\alpha|\leqslant k}\|\partial^\alpha a\|_0.$$

b) 考虑分解式

$$h(D)(au) = h(D)T_a u + h(D)T_u a + r_1,$$
$$ah(D)u = T_a h(D)u + T_{h(D)u} a + r_2,$$

证明,若 $s+m>0,\ s>0$,则

$$|[h(D),\, a]u|_s \leqslant C(\|a\|_1|u|_{s+m-1} + \|u\|_0|a|_{s+m}),$$
$$\left|\left([h(D),\, a] - \frac{1}{\mathrm{i}}\sum_j \frac{\partial a}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial \xi_j}(D)\right)u\right|_s \leqslant C(\|a\|_2|u|_{s+m-2} + \|u\|_0|a|_{s+m}).$$

C.7.* 设 $L=\sum_{j=1}^n A_j\partial_j + B$ 是环 $\mathbb{T}^n$ 上一个 (在第 II 章习题 C.7 的意义下的) 正对称 $N\times N$ 系统.

假设对于某个 $\gamma>0$ 和 $s>0$,我们有

$$K(x) = \frac{1}{2}(B+B^*)(x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \partial_j A_j(x) \geqslant \gamma I, \tag{1}$$

$$\forall \xi \in S^{n-1},\ \ K(x) + s\sum_{j,\,k}\partial_j A_k(x)\xi_j\xi_k \geqslant \gamma I. \tag{2}$$

利用习题 C.5 和 C.6, 以及第 II 章习题 C.7, 证明

$$\forall u \in C^\infty(\mathbb{T}^n,\, \mathbb{C}^N),\ \ \frac{\gamma}{2}|u|_s^2 \leqslant \mathrm{Re}\ (Lu,\, u)_s{}^{①} + C(|A|_s + |B|_s)\|u\|_1^2,$$

其中 C 只依赖于 γ, $\|A\|_2$ 和 $\|B\|_1$.

C.8. 证明下述结论: 设 $u_\theta \in C^\infty$ $(\theta \geqslant \theta_0)$ 是一族函数 $u_\theta: M \to \mathbb{R}$, 满足 $\|u_\theta\|_{a_j} \leqslant M\theta^{b_j-1}$, $j=1,2$, 其中 $b_1<0<b_2$, $a_1<a_2$.

我们由 $\nu b_1 + (1-\nu)b_2 = 0$ 定义 ν, 并记 $a=\nu a_1+(1-\nu)a_2$: 若 $a\notin \mathbb{N}$, 则有

$$u = \int_0^{+\infty} u_\theta\,\mathrm{d}\theta \in C^a,$$

而

$$\|u\|_a \leqslant 常数 \cdot M.$$

a) 证明我们可以把问题归结到 $0\leqslant a_1<a_2\leqslant 1$ 的情形.

b) 记 $v_\theta = \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta} u_{\theta'}\,\mathrm{d}\theta'$, $w_\theta = \displaystyle\int_\theta^{+\infty} u_{\theta'}d\theta'$. 估计 $\|u_\theta\|_{a_2}$ 和 $\|w_\theta\|_{a_1}$. 然后根据

$$\begin{aligned}|u(x)-u(y)| &\leqslant |v_\theta(x)-v_\theta(y)| + |w_\theta(x)-w_\theta(y)|\\ &\leqslant (x-y)^{a_2}\|v_\theta\|_{a_2} + |x-y|^{a_1}\|w_\theta\|_{a_1}\end{aligned}$$

①这里 $(Lu,u)_s = (\langle D\rangle^s Lu, \langle D\rangle^s u)$.

来选择适当的 θ 以得到最佳估计.

C.9. 陈述并证明对应于 Sobolev 空间 $H^s(M)$ 的 Nash–Moser 定理.

我们可以把引理 4.2.1(习题 C.8) 修正为: 设 (u_θ) 是 $C^\infty(M)$ 中的一族函数,对于 $j=1,2$ 和 $\sigma_1<0<\sigma_2$ 满足 $|u_\theta|_{s_j}\leqslant M(\theta)\theta^{\sigma_j-1}$, 其中 $\displaystyle\int_1^\infty M(\theta)^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\theta}<+\infty$. 则 $\displaystyle\int_1^\infty u_\theta\,\mathrm{d}\theta\in H^s$, 其中 $s=\nu s_1+(1-\nu)s_2,\ \nu\sigma_1+(1-\nu)\sigma_2=0$.

我们注意到 (对于 C^∞ 或 H^s 的)Nash–Moser 定理在假设 $(\mathscr{H}_1)$ 和 $(\mathscr{H}_2)$ 只对于某个有界区间中的 α (或 s) 成立时也是成立的, 具体显出相应的限制条件.

C.10* 利用习题 C.7 和 C.9, 证明下述结论. 设 $F:\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^N\times(\mathbb{R}^N)^n\to\mathbb{R}^N$ 是一个 C^∞ 函数, $F=F(x,u,p_1,\cdots,p_n)$ 满足下述条件:

i) $F(x,0,0)=0$,

ii) $\exists\gamma>0$,

$$K(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}(x,0,0)+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^*(x,0,0)\right)-\frac{1}{2}\sum_j\frac{\partial^2F}{\partial x_j\partial p_j}(x,0,0)\geqslant\gamma I,$$

且对于某个 $s_0>\dfrac{n}{2}+d$,

$$\forall\xi\in S^{n-1},\ K(x)+s_0\sum_{j,k}\frac{\partial^2F}{\partial x_j\partial p_k}(x,0,0)\xi_j\xi_k\geqslant\gamma I.$$

则对于某个 s_1 和任意的 $s\in\left(\dfrac{n}{2}+d,\,s_1\right]$, 存在 H^s 中 0 点的某个邻域 W,满足对于任意的 $f\in W$, 方程 $F\left(x,u,\dfrac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)=f$ 具有解 $u\in H^s$. (具体写出在 d 和 s_1 上加的限制条件).

参考文献

包含阅读本书所需预备知识的书籍

[CP] J. Chazarain, A. Piriou. *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires.* Gauthier-Villars, 1981.

[R] W. Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, 1973.

[S] L. Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.* Paris: Hermann, 1965.①

[T1] M. E. Taylor. *Partial Differential Equations. 1: Basic Theory.* Berlin: Springer-Verlag, 1996.

[Z] C. Zuily: *Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles. Cours et problèmes résolus.* Paris: Dunod, 2002.

[Ch1] 陈恕行. *现代偏微分方程导论*. 北京: 科学出版社,2006.②

[X] 夏道行, 严绍宗, 吴卓人, 舒五昌. *实变函数论与泛函分析*. 北京: 高等教育出版社, 1983.

[QW] 齐民友, 吴方同. *广义函数与数学物理方程 (第二版)*. 北京: 高等教育出版社, 1999.

和本书基本处于同一水平的著作

[CM] R. R. Coifman, Y. Meyer. *Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels*, Astérisque, vol. 57, SMF, Paris, 1978.

[Ha] R. S. Hamilton. *The inverse function theorem of Nash and Moser.* Bull. Amer. Math. Soc. 1982, 7: 65–222.

[H1] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators.* vol. 1, Springer, 1983.

①译校者注: 有英译本 L. Schwartz. *Mathematics for the physical sciences.* Paris: Hermann; Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1966.

②中文参考文献为译校者所加.

[H2] L. Hörmander. *On the existence and the regularity of linear pseudo-differential equations.* Enseign. Math. 1971 (**18**).

[H3] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators.* vol. 3 §18.1, Springer, 1985.

[Ma1] A. J. Majda. *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several variables.* Appl. Math. Sci., vol. 53, Springer, 1984.

[Mo] J. Moser. *A rapidly convergent iteration method and non linear differential equations.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. **20** (1966), 499–535.

[N] L. Nirenberg. *Lectures on linear partial differential equations.* Regional Conference Series in Mathematics, vol. 17, AMS, Providence, R.I. 1973.

[Ra] J. Rauch. *Singularities of solutions to semilinear wave equations.* J. Math. Pures Appl. **58** (1979), 299–308.

[Sp] M. Spivak. *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus.* Benjamin, 1965.

[T] M. E. Taylor. *Pseudodifferential operators.* Princeton, 1981.

[Ch2] 陈恕行. 拟微分算子. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[CLQ] 陈恕行, 李成章, 仇庆久. 仿微分算子引论. 北京: 科学出版社, 1990.

[Q] 齐民友. 线性偏微分算子引论(上册). 北京: 科学出版社, 1986.

研究水平的补充文献

[A] S. Alinhac, *Paracomposition et opérateurs paradifférentiels.* Comm. Partial Differential Equations **11** (1986), 87–121.

[Au] T. Aubin. *Inégalités d'interpolation.* Bull. Sci. Math. **105** (1981), 229–234.

[B1] J.-M. Bony. *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations auyx dérivées partielles non linéaires.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **14** (1981), 209–246.

[B2] J.-M. Bony. *Second microlocalization and propagation of singularities for semilinear hyperbolic equations.* Workshop and symposium on hyperbolic equations and related topics, Kokota and Kyoto, 1984.

[Bt] J.-B. Bost. *Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens.* Seminaire Bourbaki 1984-85, no. 639, Astérisque, vol. 133–134.

[DJ] G. David, J.-L. Journé. *A boundedness criterion for generalized Calderon–Zygmund operators.* Ann. Math. **120** (1984), 371–397.

[G] M. Günther. *On the perturbation problem associated to isometric embeddings of Riemannian manifolds.* Ann. Global Anal. Geom. **7**(1) (1989), 69–77.

[H4] L. Hörmander. *Fourier integral operators I.* Acta Math. **127** (1971), 79–183.

[H5] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators.* vols. 3 and 4. Springer, 1985.

[H6] L. Hörmander. *The boundary problem of physical geodesy.* Arch. Ration. Mech. Anal. **62** (1976), 1–52.

[H7] L. Hörmander. *On the Nash–Moser implicit function theorem.* Ann. Acad. Sci. Fenn.

Math. Series A.I. Mathematics **10** (1985), 255–259.

[H8] L. Hörmander. *Pseudo-differential operators of type 1,1.* Commun. Partial Differential Equations **13** (1988), 1085–1111.

[H9] L. Hörmander. *The Nash–Moser theorem and paradifferential operators.* Analysis et cetera pp.429–449, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[Hw] I. L. Hwang. *The L^2 boundedness of pseudodifferential operators.* Trans. Amer. Math. Soc. **302** (1987), 55–76.

[L] G. Lebeau. *Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **35** (1985), 145–216.

[Ma2] A. J. Majda. *The stability and the existence of multidimensional shock fronts.* Mem. Amer. Math. Soc. **41** no. 275 and 43, no. 281 (1983).

[M] Y. Meyer. *Remarque sur un théorème de J.-M. Bony.* Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo (2). Atti del Seminario di Analisi Armonica, Pisa, no. 1, (1981).

[Na] J. Nash. *The imbedding problem for Riemannian manifolds.* Ann. Math. **63** (1956), 20–63.

[Sj] J. Sjöstrand. *Singularités analytiques microlocales.* Astérisque, vol. 95, SMF, Paris, 1982.

[T2] M. E. Taylor, *Partial Differential Equations. 2: Qualitative Studies of Linear Equations.* Applied Mathematical Sciences 116, Springer-Verlag, New York, 1996.

[T3] M. E. Taylor. *Partial Differential Equations. 3: Nonlinear Equations.* Applied Mathematical Sciences 117, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[QX] 齐民友, 徐超江. 线性偏微分算子引论(下册). 北京: 科学出版社, 1992.

主要记号

名词索引

译校后记

翻译这本书前后总共历时五年. 倒不是实实在在地干了五年, 只是从开始翻译第一笔算起到最后完稿, 前后断断续续差不多用了五年的时间.

2006 年夏, 校者在马德里国际数学家大会上向高等教育出版社的编辑人员建议翻译出版本书. 而译者既然早有这份心思, 等到 07 年 1 月博士毕业以后就开始全面开展这项工作.

两位作者都是偏微分方程的专家. S. Alihnac 年长一些. 不过译校者接触比较多的是 P.Gérard, 巴黎第十一大学教授, 2006 年 ICM 报告人. 他更为有意思的身份是 Bourbaki 学派目前的成员之一. 2000 年末, 译者听他给研究生开基础课 "发展方程", 讲到 Stricharz 不等式, 只听他轻描淡写地说了一句:" 上个月我们刚刚把这个结果改进了一下, 具体地说, 是 ······" 一时间译者突然有一种感慨, 但愿有一天, 中国的学生不用远赴重洋, 也能够听到这样的课程.

本书的译校者都不算是做偏微分方程的, 但我们都觉得这本书写得很好也很有用, 这大约可以作为本书对于不专门从事这一领域的数学工作者也很有用处的一个例证.

我们觉得本书给了我们一个十分直接的办法来领会拟微分算子的基本精要. 它直奔主题, 例如在 I.5 节读者可以立即懂得椭圆算子为什么如此基本, 因为它在模掉一个光滑算子之后是可逆算子, 相当于可逆矩阵在矩阵论中的地位! 又如在第 III 章中, 读者可以体会到如何将本书中刚学会的技术应用于实际的数学问题, 例如等距嵌入及环面上的动力系统. 最后本书由大量有意思的习题. 在法国, 任何层次的数学课, 教师一般总会给出不少有意思的习题帮助学生掌握所学的知识, 同时让学生明白其实自己只要花一点力气就可以推出有意思的结论. 这也许是法国数学水平高的一个原因吧!

本书的法文版是由巴黎第十一大学数学系的一个秘书根据手稿在某种比较原始的文字处理机上打印的, 因此我们在法文版中可以看出一些比较显然的手写体辨识错误. 出版后不久, 她的办公室遭窃, 那个文字处理机也给偷了 ⋯⋯ . 而英文版则在 2007 年由美国数学会出版. 尽管如此, 对于这么一本非常出色的书, 我们还是觉得应该有一个中文版, 以便让更多的高校学生和数学工作者有机会阅读本书. 同时我们也发现, 英文版中的错误颇多, 有时还会影响阅读 (我们发现的二百多处差错都已一一订正). 这更使我们觉得我们的努力不会白费. 不过我们仍要感谢英文版的译者 Stephen S. Wilson 博士所做的 TEX文件, 它使得我们的翻译过程大大缩短了.

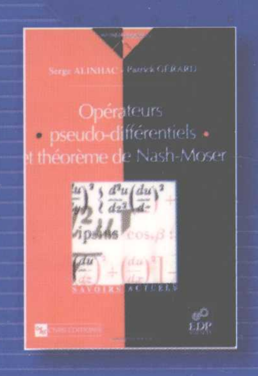
在国内有许多前辈曾经或仍然在从事拟微分算子相关的研究, 我们所列出的中文参考文献就是他们为传播这一学说所作努力的最好的证明.

我们感谢徐超江先生对于我们的支持和鼓励. 感谢巴黎理工大学 (Ecole Polytechnique), 巴黎第七大学和美国 Vanderbilt 大学为我们提供了必要的工作条件.

最后, 译者还想感谢复旦大学的张锦豪老师, 十余年前在传授给译者很多数学知识的同时还教会了译者如何使用 TEX.

姚一隽 (于 Nashville)　　麻小南 (于 Paris)

2008 年 3 月



拟微分算子理论是 20 世纪 50 年代开始发展的一套分析工具，在偏微分方程和微分几何等领域的许多问题的研究中都有着广泛应用。本书以精练的篇幅在第一章中讲述了这一理论的核心内容。

Nash–Moser 定理是 20 世纪 50 年代末、60 年代初的一个重要数学成果，直到今天，它仍然在微分几何、动力系统和非线性偏微分方程中有着重要的地位。它是本书第三章的论题。

这两套理论在数学文献中基本上都是分开单独处理的，而本书则在介绍这两个各自本身都有着非常重要意义的理论的同时，还阐明了它们是如何关联在一起的。通过大量的例子和习题，作者们给出了几乎所有结论的简洁而完整的证明。通过循序渐进地引进微局部分析、Littlewood–Paley 理论、二进分析、仿微分算子及其在插值不等式中的应用、双曲方程（组）的能量不等式、隐函数定理等内容，作者们建立了上述两套理论之间的一座清晰的桥梁。

本书可作为高等院校数学类专业的研究生学习非线性偏微分方程或几何学的教学用书，也可供对微局部分析、偏微分方程以及几何学感兴趣的数学工作者使用参考。

本书对于有志打好分析基础的研究生来说是一本非常有价值的教学用书。对于从事分析或者几何方面研究的数学工作者来说，本书也是了解另一个领域的快速有效的途径。

学科类别：数学
academic.hep.com.cn


ISBN 978-7-04-024619-3
9 787040 246193 >
定价 29.00 元